

Глава 13

СПИНОРНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

1. СОПРЯЖЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ

I. Все тензоры преобразования C , рассмотренные ранее, содержали только действительные числа (константы), такие как 1, -1 , n . Во многих технических задачах тензор преобразования C содержит также комплексные числа (константы), такие как $a + jb$. В таких случаях все уравнения и все формулы преобразования можно записать в более общей форме.

Примечательно, что эти более общие формулы, которые мы получим, будут лишь частным случаем еще более общих формул, получаемых, если компоненты тензора преобразования C не действительные или комплексные константы, как 5 или $a + jb$, а функции переменной x^α .

II. Если n -матрицы геометрического объекта некоторой валентности содержат комплексные компоненты, то из него можно построить еще один геометрический объект, «Сопряжение» геометрического объекта образуется при замещении каждой компоненты $(a + jb)$ каждой n -матрицы сопряженной комплексной величиной $(a - jb)$. В прямом обозначении сопряжение геометрического объекта A обозначается звездочкой: A^* . (Индексное обозначение дано ниже.) Например, если в некоторой частной системе координат

$$e = \begin{array}{cccc} a & b & c & d \\ \hline a + jb & c & -jd & e - jf \end{array}, \quad (13.1)$$

его сопряжение имеет вид

$$e^* = \begin{array}{cccc} a & b & c & d \\ \hline a - jb & c & jd & e + jf \end{array} \quad (13.2)$$

или, если

$$z = \begin{array}{c|cccc} & \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c} & \mathbf{d} \\ \hline \mathbf{a} & a + jb & -jc & 0 & 0 \\ \hline \mathbf{b} & -jc & d - je & f & 0 \\ \hline \mathbf{c} & -f & 0 & 0 & g + jh \\ \hline \mathbf{d} & 0 & jp & k + jl & m - jn \end{array} \quad (13.3)$$

его сопряжение

$$\begin{array}{c|cccc} & \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c} & \mathbf{d} \\ \hline \mathbf{a} & a - jb & +jc & 0 & 0 \\ \hline \mathbf{b} & jc & d + je & f & 0 \\ \hline \mathbf{c} & -f & 0 & 0 & g - jh \\ \hline \mathbf{d} & 0 & -jp & k - jl & m + jn \end{array} \quad (13.4)$$

III. При сопряжении сопряженного геометрического объекта восстанавливается оригинал

$$(\mathbf{A}^*)^* = \mathbf{A}. \quad (13.5)$$

Сопряжение произведения получается сопряжением каждого сомножителя

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^* = \mathbf{A}^* \cdot \mathbf{B}^*. \quad (13.6)$$

Сопряжение обратного геометрического объекта то же самое, что и обращение сопряженного, т. е.

$$(\mathbf{A}^{-1})^* = (\mathbf{A}^*)^{-1}. \quad (13.7)$$

Другими словами, можно сначала сделать обращение тензора валентности 2, а потом сопряжение или, наоборот, сначала сопряжение, а потом его обращение. Конечный тензор будет тот же самый.

2. БОЛЕЕ ОБЩЕЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОЩНОСТИ

1. Комплексное число $\hat{i} = a + jb$ представляется на плоскости (плоскость времени) линией с координатами a и b (рис. 13.1). Произведение комплексного числа самого на себя $(\hat{i})(\hat{i})$ должно быть определено так, чтобы оно было равно квадрату его абсолютной величины, т. е. $a^2 + b^2$. Этот результат можно полу-

чить только в том случае, если произведение i на себя произвольно определено как

$$(\widehat{i})(\widehat{i}^*) = (a + jb)(a - jb) = a^2 + b^2, \quad (13.8)$$

т. е. как произведение комплексного числа на свое сопряжение.

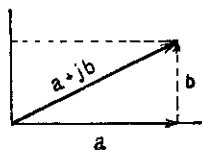


Рис. 13.1. Комплексное число, как вектор времени.

II. Вообще произведение двух векторов (дающее скаляр) определяется посредством сопряжения одного из векторов. Таким образом, если

$$a = \begin{array}{c} a \quad b \quad c \quad d \\ \hline (a + jb) \quad c + jd \quad e + jf \quad g + jh \end{array},$$

$$b = \begin{array}{c} p \quad q \quad r \quad s \quad t \quad u \quad v \quad z \\ \hline p + jq \quad r + js \quad t + ju \quad v + jz \end{array},$$

то их произведение определяется как

$$ab^* = (a + jb)(p - jq) + (c + jd)(r - js) + (e + jf)(t - ju) + (g + jh)(v - jz) = (ap + bq + cr + ds + et + fu + gv + hz) + j(bp - aq + dr - cs + ft - eu + hv - gz).$$

III. В соответствии с определением, данным выше, *мощность входа в системе переменного тока*

$$P = e^*i = (e_a)^*i^a. \quad (13.9)$$

Эта «воображаемая» мощность имеет реальную и мнимую компоненты. По соглашению сопряженным будет вектор *напряжения*, а не вектор тока, потому что реактивная мощность, вызванная отставанием тока, должна быть отрицательна. Это соотносится с практикой выбора вектора приложенного напряжения как оси отсчета времени. Например, если токи в двух цепях m и n отстают, т. е.

$$e = \begin{array}{c} m \quad n \\ \hline a + j0 \quad 0 + jb \end{array}, \quad i = \begin{array}{c} m \quad n \\ \hline 0 - jc \quad d + j0 \end{array},$$

то, представляя реактивную мощность, обусловленную запаздыванием токов, отрицательной, имеем: полная мощность входа равна

$$P = e^*i = (a)(-jc) + (-jb)(d) = -j(ac + bd).$$

Если не делать сопряжение e , то ответ $P = -j(ac - bd)$ не верен.

В частном случае, когда компоненты — действительные числа, произведение двух векторов сводится к обычной форме.

3. ФОРМУЛЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

I. Пусть вектор тока системы i преобразуется в i' формулой преобразования $i = Ci'$, где некоторые компоненты C — комплексные числа.

Предположим снова, что линейная форма, мощность входа — инвариант, и исследуем формулы преобразования различных тензоров e , z и др., когда компоненты C — комплексные числа:

$$P = e^* i = e'^* i' = P'. \quad (13.10)$$

Эта формула, однако, более общая, чем аналогичная формула (4.22).

II. Чтобы найти формулу преобразования e , подставим снова $i \equiv Ci'$ в уравнение (13.10): $e^* Ci' \equiv e'^* i'$.

Это тождество, поэтому i' можно опустить: $e^* C = e'^*$.

Взяв сопряжение от обеих частей, получим

$$e C^* = e', \quad (13.11)$$

$$e = C_i^{*-1} e'. \quad (13.12)$$

Следовательно, если тензор преобразования C содержит комплексные компоненты, то в формулах преобразования также появляется сопряжение с C , т. е. C^* .

III. Установим теперь формулу преобразования z , следуя методу рассуждения гл. 4, § 8. Уравнение напряжения $e = zi$. Подставляя i и e через их значения со штрихами, получаем

$$C_i^{*-1} e' = z C i',$$

$$e' = C_i^* z C i'.$$

Так как по постулату второго обобщения форма уравнения напряжения не зависит от выбора системы координат $e' = z' i'$, то, следовательно, формула преобразования z

$$z' = C_i^* z C. \quad (13.13)$$

4. ТЕНЗОР «ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ»

I. Простой пример матрицы преобразования C , имеющей компоненты в виде комплексных чисел, появляется при рассмотрении трех «операторов последовательности» в методе симметричных составляющих.

Пусть даны три различные катушки с неравными взаимными импедансами. Их тензор импеданса, векторы приложенного напряжения и тока

$$z = \begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|c|} \hline a & b & c \\ \hline Z_{aa} & Z_{ab} & Z_{ac} \\ \hline b & Z_{ab} & Z_{bb} & Z_{bc} \\ \hline c & Z_{ac} & Z_{bc} & Z_{cc} \\ \hline \end{array} \end{array}, \quad e = \begin{array}{|c|c|c|} \hline a & b & c \\ \hline e_a & e_b & e_c \\ \hline \end{array}, \quad i = \begin{array}{|c|c|c|} \hline a & b & c \\ \hline i_a & i_b & i_c \\ \hline \end{array}.$$

II. Пусть теперь действительные токи i^a, i^b, i^c заменены другим множеством гипотетических токов i^0, i^1 и i^2 (называемых токами нулевой, положительной и отрицательной последовательности фаз соответственно) следующим образом:

$$\begin{aligned} i^a &= \frac{1}{\sqrt{3}} (i^0 + i^1 + i^2), \\ i^b &= \frac{1}{\sqrt{3}} (i^0 + a^2 i^1 + a i^2), \\ i^c &= \frac{1}{\sqrt{3}} (i^0 + a i^1 + a^2 i^2), \end{aligned} \quad C = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 2 \\ \hline a & 1 & 1 & 1 \\ \hline b & 1 & a^2 & a \\ \hline c & 1 & a & a^2 \\ \hline \end{array} \end{array}, \quad (13.14)$$

где операторы $a = -\frac{1}{2} + j866 = \epsilon^{j120^\circ}$, $a^2 = -\frac{1}{2} - j866 = \epsilon^{-j120^\circ}$

вращают вектор времени $(a + jb)$ против часовой стрелки (или по часовой стрелке) на 120° соответственно. Они удовлетворяют соотношению $1 + a + a^2 = 0$.

Сопряженный с a есть a^2 и сопряженный с a^2 есть a . Кроме того, $a^3 = 1$ и $a^4 = a$. В дальнейшем этот частный тензор преобразования C будем называть «тензором последовательности».

Множитель $1/\sqrt{3}$ вводится здесь из тех соображений, что мощность $e^* i$ должна быть инвариантом относительно преобразования последовательности (см. § 19). Таким образом, тензор последовательности можно использовать в сочетании с другими тензорами инвариантных преобразований на равных основаниях.

Компоненты тензора последовательности C являются коэффициентами при новых токах. Обращение сопряженного и сопряжение обратного (или их транспонирование) имеют вид

$$C^{-1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|c|} \hline a & b & c \\ \hline 0 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & a & a^2 \\ \hline 2 & 1 & a^2 & a \\ \hline \end{array} \end{array}, \quad C_t^{-1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 2 \\ \hline a & 1 & 1 & 1 \\ \hline b & 1 & a & a^2 \\ \hline c & 1 & a^2 & a \\ \hline \end{array} \end{array},$$

$$\begin{aligned}
 C^* &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{array}{c|cc} & 0 & 1 & 2 \\ \hline a & 1 & 1 & 1 \\ b & 1 & a & a^2 \\ \hline c & 1 & a^2 & a \end{array}, & C_i^* &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{array}{c|cc} & a & b & c \\ \hline 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & a^2 \\ \hline 2 & 1 & a^2 & a \end{array}. \quad (13.15) \\
 C^{*-1} &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{array}{c|cc} & a & b & c \\ \hline 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a^2 & a \\ \hline 2 & 1 & a & a^2 \end{array}, & C_i^{*-1} &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{array}{c|cc} & 0 & 1 & 2 \\ \hline a & 1 & 1 & 1 \\ b & 1 & a^2 & a \\ \hline c & 1 & a & a^2 \end{array}
 \end{aligned}$$

Представленные здесь семь тензоров образуются только двумя различными видами матриц

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{array}{c|cc} & 1 & 1 & 1 \\ \hline & 1 & a^2 & a \\ \hline & 1 & a & a^2 \end{array} \quad \text{и} \quad \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{array}{c|cc} & 1 & 1 & 1 \\ \hline & 1 & a & a^2 \\ \hline & 1 & a^2 & a \end{array}$$

с различно расположенными индексами. Детерминант первой матрицы равен $\sqrt{3}(a-a^2)$, а второй $\sqrt{3}(a^2-a)$.

III. Три строки тензора преобразования C являются тремя так называемыми «операторами последовательности», а именно:

1) оператор нулевого сдвига фаз $S^0 = (1, 1, 1)$; 2) оператор положительного сдвига фаз $S^1 = (1, a^2, a)$; 3) оператор отрицательного сдвига фаз $S^2 = (1, a, a^2)$.

Таким образом, обычный метод симметричных составляющих использует три различных матрицы преобразования (каждая матрица состоит из одной строки), в то время как данный метод использует только одну матрицу преобразования из трех строк, что ускоряет вычисления и упрощает метод рассуждения.

IV. Вектор приложенного напряжения есть $e' = C_i^* e$

$$e' = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{array}{c|cc} & 0 & 1 & 2 \\ \hline & e_a + e_b + e_c & e_a + a e_b + a^2 e_c & e_a + a^2 e_b + a e_c \\ \hline & e_0 & e_1 & e_2 \end{array} \quad (13.16)$$

Новые компоненты вектора тока $i' = C^{-1} i$

$$i' = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{array}{c|cc} & 0 & 1 & 2 \\ \hline & i^a + i^b + i^c & i^a + a i^b + a^2 i^c & i^a + a^2 i^b + a i^c \\ \hline & i_0 & i_1 & i_2 \end{array} \quad (13.17)$$

Новые напряжения и токи находятся из старых по той же формуле, поскольку $C_i^* = C^{-1}$.

5. ТЕНЗОР ИМПЕДАНСА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

I. Рассматривая более общую формулу тензора импеданса трех *неодинаковых* катушек

$$z = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix} & \begin{array}{|c|c|c|} \hline Z_{aa} & Z_{ab} & Z_{ac} \\ \hline Z_{ba} & Z_{bb} & Z_{bc} \\ \hline Z_{ca} & Z_{cb} & Z_{cc} \\ \hline \end{array} \end{matrix} \quad (13.18)$$

получаем, что его компоненты относительно последовательности сдвинутых по фазе осей находятся по формуле $C_i^* z C$. Первый шаг:

$$z C = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix} & \begin{array}{|c|c|c|} \hline Z_{aa} + Z_{ab} + Z_{ac} & Z_{aa} - a^2 Z_{ab} + a Z_{ac} & Z_{aa} + a Z_{ab} + a^2 Z_{ac} \\ \hline Z_{ba} + Z_{bb} + Z_{bc} & Z_{ba} + a^2 Z_{bb} + a Z_{bc} & Z_{ba} + a Z_{bb} + a^2 Z_{bc} \\ \hline Z_{ca} + Z_{cb} + Z_{cc} & Z_{ca} + a^2 Z_{cb} + a Z_{cc} & Z_{ca} + a Z_{cb} + a^2 Z_{cc} \\ \hline \end{array} \end{matrix}$$

Промежуточный тензор обычно записывается как

$$z C = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix} & \begin{array}{|c|c|c|} \hline Z_{a0} & Z_{a1} & Z_{a2} \\ \hline Z_{b0} & a^2 Z_{b1} & a Z_{b2} \\ \hline Z_{c0} & a Z_{c1} & a^2 Z_{c2} \\ \hline \end{array} \end{matrix} \quad (13.19)$$

где

$$\begin{aligned} Z_{a0} &= (1/\sqrt{3})(Z_{aa} + Z_{ab} + Z_{ac}); \\ Z_{a1} &= (1/\sqrt{3})(Z_{aa} + a^2 Z_{ab} + a Z_{ac}); \\ Z_{a2} &= (1/\sqrt{3})(Z_{aa} + a Z_{ab} + a^2 Z_{ac}). \end{aligned} \quad (13.20)$$

Этот тензор представляет импедансы каждой фазы, вызванной токами последовательности фаз, согласно уравнению $e = z C i'$, как показано в гл. 4, § 10. Он используется, когда токи выражены в осях *последовательности*, а напряжения — относительно *реальных* осей цепи.

Второй шаг $C_i^* (z C) =$

$$z' = \frac{1}{3} \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & Z_{a0} + Z_{b0} + Z_{c0} & Z_{a1} + a^2 Z_{b1} + a Z_{c1} & Z_{a2} + a Z_{b2} + a^2 Z_{c2} \\ \hline 1 & Z_{a0} + a Z_{b0} + a^2 Z_{c0} & Z_{a1} + Z_{b1} + Z_{c1} & Z_{a2} + a^2 Z_{b2} + a Z_{c2} \\ \hline 2 & Z_{a0} + a^2 Z_{b0} + a Z_{c0} & Z_{a1} + a Z_{b1} + a^2 Z_{c1} & Z_{a2} + Z_{b2} + Z_{c2} \\ \hline \end{array} \quad (13.21)$$

$$z' = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & Z_{00} & Z_{01} & Z_{02} \\ \hline 1 & Z_{10} & Z_{11} & Z_{12} \\ \hline 2 & Z_{20} & Z_{21} & Z_{22} \\ \hline \end{array} \quad (13.22)$$

II. Когда взаимные индуктивности трех неодинаковых катушек нули, тензор импеданса равен

$$z = \begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array} \begin{array}{|c|c|c|} \hline a & Z_a & 0 & 0 \\ \hline b & 0 & Z_b & 0 \\ \hline c & 0 & 0 & Z_c \\ \hline \end{array}, \quad z' = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & Z_0 & Z_2 & Z_1 \\ \hline 1 & Z_1 & Z_0 & Z_2 \\ \hline 2 & Z_1 & Z_1 & Z_0 \\ \hline \end{array} \quad (13.23)$$

где

$$\begin{aligned} Z_0 &= (1/3)(Z_a + Z_b + Z_c); \\ Z_1 &= (1/3)(Z_a + a Z_b + a^2 Z_c); \\ Z_2 &= (1/3)(Z_a + a^2 Z_b + a Z_c) \end{aligned} \quad (13.24)$$

Они называются соответственно реактансами нулевой, положительной и отрицательной последовательности фаз.

Необходимо заметить, что тензор импеданса последовательности z' не является симметричным даже в случае неподвижных катушек. Вообще симметричный тензор импеданса перестает быть симметричным после преобразования с помощью матрицы S с комплексными компонентами.

III. Уравнение $e' = z' i'$ дает три последовательных напряжения, когда приложены три последовательных тока. В общем случае, когда три катушки неодинаковы, каждый приложенный ток последовательности генерирует все три последовательных напряжения. Например, ток нулевой последовательности i^0 генерирует напряжение обратного порядка следования фаз, равное $i^0 Z_{20} = i^0 (Z_{a2} + Z_{b2} + Z_{c2})/3$.

Уравнение решается в виде $i' = z'^{-1} e'$. Решением являются три тока порядка следования фаз, порожденных тремя напряже-

ниями последовательности. В случае *неодинаковых катушек* каждое приложенное напряжение последовательности генерирует все три тока последовательности и форма z' (уравнение (13.22) или (13.23)) не имеет никакого преимущества перед первоначальной формой z уравнения (13.18).

6. ПРИВЕДЕНИЕ К ДИАГОНАЛЬНОЙ ФОРМЕ

I. Когда три катушки одинаковы, тензор импеданса последовательности z' можно привести к специальной форме, которая уменьшает количество вычислений.

Предположим, что тензор импеданса первоначальных трех катушек имеет форму

$$z = \begin{array}{c} \text{a} \\ \text{z=b} \\ \text{c} \end{array} \begin{array}{|c|c|c|} \hline \text{a} & Z & X_1 & X_2 \\ \hline \text{b} & X_2 & Z & X_1 \\ \hline \text{c} & X_1 & X_2 & Z \\ \hline \end{array}, \quad (13.25)$$

где три катушки имеют равные собственные импедансы Z и две (не три) различные взаимные индуктивности X_1 и X_2 . Такая ситуация возникает в трехфазных синхронных и индукционных машинах с равномерными зазорами. Тензор импеданса последовательности уравнения (13.21) становится диагональным 2-тензором:

$$z' = \frac{1}{3} \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & Z+X_1+X_2 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & Z+a^2X_1+aX_2 & 0 \\ \hline 2 & 0 & 0 & Z+aX_1+aX_2 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & Z_0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & Z_1 & 0 \\ \hline 2 & 0 & 0 & Z_2 \\ \hline \end{array}, \quad (13.26)$$

где Z_0 , Z_1 и Z_2 — реактансы нулевого, положительного и отрицательного порядков следования фаз соответственно.

II. Когда две взаимные индуктивности X_1 и X_2 равны, то тензор импеданса порядка следования фаз становится равным (поскольку $1+a+a^2=0$)

$$z' = \frac{1}{3} \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & Z+2X & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & Z-X & 0 \\ \hline 2 & 0 & 0 & Z-X \\ \hline \end{array} = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & Z_0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & Z_1 & 0 \\ \hline 2 & 0 & 0 & Z_1 \\ \hline \end{array} \quad (13.27)$$

Иначе говоря, при одинаковых взаимных индуктивностях реактансы положительного и отрицательного порядка следования фаз равны.

III. Тензор адмиттанса y' также имеет диагональную форму

$$y' = \begin{array}{c|ccc} & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 1/Z_0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1/Z_1 & 0 \\ \hline 2 & 0 & 0 & 1/Z_2 \end{array}, \quad (13.28)$$

указывая, что каждое напряжение последовательности генерируется только своим собственным током последовательности и наоборот.

IV. Одной из наиболее важных проблем в теории матриц является нахождение матрицы преобразования, которая приводит данную матрицу к диагональной форме. Интересно, что метод симметричных составляющих дает матрицу преобразования S (уравнение (13.14)), которая приводит определенные симметричные матрицы к диагональной форме. (Конечно, в теории матриц линейная форма не обязательно инвариантна при преобразовании.) Несомненно, что существуют и другие группы S -матриц, которые приводят к диагональной форме еще более сложные z' .

V. Если тензор импеданса имеет n строк и столбцов, матрица преобразования S в методе симметричных составляющих имеет вид

$$S = \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{array}{c|cccc} & 0 & 1 & 2 & n-1 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 1 & \vdots & 1 \\ \hline 1 & 1 & a^{-1} & a^{-2} & \vdots & a^{-1(n-1)} \\ \hline 2 & 1 & a^{-2} & a^{-4} & \vdots & a^{-2(n-1)} \\ \hline \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ \hline n-1 & 1 & a^{-(n-1)} & a^{-2(n-1)} & \vdots & a^{-(n-1)(n-1)} \end{array}, \quad (13.29)$$

где a — корень n степени из единицы. Когда $n=3$, S определяется уравнением (13.14).

Определитель C называется «определителем Вандермонда», общая форма которого имеет вид

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ a & b & c & \dots & f \\ a^2 & b^2 & c^2 & \dots & f^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a^{n-1} & b^{n-1} & c^{n-1} & \dots & f^{n-1} \end{vmatrix} \quad (13.30)$$

Здесь a, b, c, \dots, f заменяют n различных корней n -й степени из единицы.

7. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ТЕНЗОРА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

I. Трехфазные сети состоят из различных типов трехфазных устройств, соединенных различными способами, параллельно или последовательно, как отдельные катушки. Компонентами трехфазных устройств могут быть генераторы, трансформаторы, линии передач, нагрузки.

Использование тензора последовательности, описанного в предыдущем параграфе, сокращает анализ, если выполняются следующие два условия:

1) каждое отдельное трехфазное устройство сбалансировано, т. е. если его тензор импеданса имеет форму уравнений (13.25) или (13.27); 2) связь каждого устройства с другими сбалансирована.

II. Если одно или больше устройств или их связей не сбалансированы, то полная сеть разбивается на две части: 1) содержащую несколько сбалансированных устройств; 2) содержащую несколько несбалансированных устройств.

Анализ первой части упрощается при использовании тензора последовательности, второй части — нет. Анализ часто становится фактически более сложным.

В большинстве трехфазных сетей несбалансированная часть появляется из-за аварии или несбалансированной нагрузки, в то время как сбалансированные части содержат несколько устройств. Очевидно, в этом случае имеет смысл использовать тензор последовательности.

Анализ взаимосвязи трехфазных устройств систематически изложен в гл. 19. Несколько простейших примеров будут рассмотрены здесь.

III. Во всех рассматриваемых до сих пор задачах осями «примитивной» сети всегда были оси реальных катушек. Однако в трехфазных устройствах конструктивные параметры могут быть известны вдоль осей последовательности. Следовательно, тензор импеданса z примитивной сети каждого трехфазного устройства может быть выражен:

либо вдоль реальных фазовых осей a, b, c ; либо вдоль осей последовательности $0, 1, 2$.

Аналогично приложенные напряжения e или токи i выражаются относительно этих двух типов осей.

Однако тензор преобразования C , показывающий способ соединения катушек, должен быть выражен сначала по реальным осям цепи a, b, c и только после этого его следует преобразовать к осям последовательности $0, 1, 2$.

При нахождении различных геометрических объектов результирующей сети они могут быть выражены либо по фазным осям a, b, c , либо по осям последовательности $0, 1, 2$, либо по тем и другим.

8. ГЕНЕРАТОР, ОПИСАННЫЙ В ОСЯХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

I. Пусть трехфазный генератор задан своим тензором импеданса z' и генерируемым напряжением e' , выраженными по осям последовательности:

$$z' = \begin{array}{c|cc} & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & Z_0 & & \\ \hline 1 & & Z_1 & \\ \hline 2 & & & Z_2 \\ \hline \end{array}, \quad (13.31) \quad e' = \begin{array}{c|cc} & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & e_1 & 0 \\ \hline \end{array}. \quad (13.32)$$

Пусть зажимы генератора соединены с любой нагрузкой посредством C . Если нагрузка и C выражены по реальным осям цепи, удобно заменить оси последовательности y, z и e генератора на оси a, b, c .

II. Из уравнения (13.13) $z' = C_i^* z C$ получим

$$z = C_i^{*-1} z' C^{-1} \quad (13.33)$$

и из $e' = C_i^* e$ получим

$$e = C_i^{*-1} e', \quad (13.34)$$

где величины со штрихами выражены по осям последовательности. Следовательно, компоненты геометрических объектов генератора в реальных контурных осях цепи находятся с помощью $C_i^{*-1} z' C^{-1}$:

$$z = \frac{1}{3} \begin{array}{c|cc} & a & b & c \\ \hline a & Z_0 + Z_1 + Z_2 & Z_0 + aZ_1 + a^2Z_2 & Z_0 + a^2Z_1 + aZ_2 \\ \hline b & Z_0 + a^2Z_1 + aZ_2 & Z_0 + Z_1 + Z_2 & Z_0 + aZ_1 + a^2Z_2 \\ \hline c & Z_0 + aZ_1 + a^2Z_2 & Z_0 + a^2Z_1 + aZ_2 & Z_0 + Z_1 + Z_2 \\ \hline \end{array}, \quad (13.35)$$

$$e = \begin{bmatrix} a & b & c \\ e_1 & a^2 e_1 & a e_1 \end{bmatrix}. \quad (13.36)$$

При использовании этих компонент геометрических объектов как отправной точки метод анализа генератора является таким же, как и метод анализа любой другой асимметричной неподвижной сети из трех катушек.

9. ГЕНЕРАТОР, ПОДСОЕДИНЕННЫЙ К НАГРУЗКЕ

I. Пусть генератор присоединен к нагрузке (рис. 13.2). Имеется два контура, следовательно, выбираются две переменных,

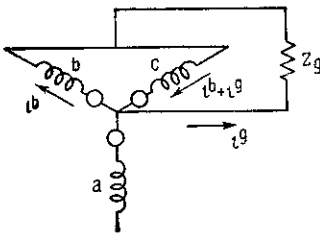


Рис. 13.2. Несимметричная нагрузка генератора.

например i^b и i^g . Тензор импеданса примитивной сети имеет вид

$$z = \frac{1}{3} \begin{array}{c|cccc} & a & b & c & g \\ \hline a & Z_0 + Z_1 + Z_2 & Z_0 + aZ_1 + a^2Z_2 & Z_0 + a^2Z_1 + aZ_2 & 0 \\ \hline b & Z_0 + a^2Z_1 + aZ_2 & Z_0 + Z_1 + Z_2 & Z_0 + aZ_1 + a^2Z_2 & 0 \\ \hline c & Z_0 + aZ_1 + a^2Z_2 & Z_0 + a^2Z_1 + aZ_2 & Z_0 + Z_1 + Z_g & 0 \\ \hline g & 0 & 0 & 0 & 3Z_g \end{array}$$

Приравнивая старые и новые токи, протекающие в каждой катушке, получаем

$$\begin{array}{l} i^a = 0 \\ i^b = i^{b'} \\ i^c = -i^{b'} - i^{g'} \\ i^g = i^{g'} \end{array} \quad C = \begin{array}{c|cc} & b' & g' \\ \hline a & & \\ \hline b & 1 & \\ \hline c & -1 & -1 \\ \hline g & & 1 \end{array}. \quad (13.37)$$

Коэффициенты при новых токах образуют матрицу C . Отсюда по формулам $C_i^* z C$ и $C_i^* e$ находим

$$z' = \begin{array}{c} b' \\ g' \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline Z_1 + Z_2 & [Z_1(1-a) + Z_2(1-a^2)]/3 \\ \hline [Z_1(1-a^2) + Z_2(1-a)]/3 & (Z_0 + Z_1 + Z_2 + 3Z_g)/3 \\ \hline \end{array}, \quad (13.38)$$

$$e' = \begin{array}{c} b' \\ g' \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline (a^2 - a)e & -ae \\ \hline \end{array}, \quad (13.39)$$

$$y' = \begin{array}{c} b' \\ g' \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline (Z_0 + Z_1 + Z_2 + 3Z_g)/3D & [Z_1(a-1) + Z_2(a^2-1)]/3D \\ \hline [Z_1(a^2-1) + Z_2(a-1)]/3D & (Z_1 + Z_2)/D \\ \hline \end{array}, \quad (13.40)$$

где $D = [Z_1 Z_2 + (Z_1 + Z_2)(Z_0 + 3Z_g)]/3$;

$$i' = \begin{array}{c} b' \\ g' \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 3e[(a^2 - a)(Z_0 + 3Z_g) + (a^2 - 1)Z_2]/D \\ \hline 3e[2aZ_1 + (1 - 2a^2)Z_2]/D \\ \hline \end{array}. \quad (13.41)$$

II. В качестве второго примера рассмотрим короткозамкнутый нагруженный генератор (рис. 13.3). Геометрические объек-

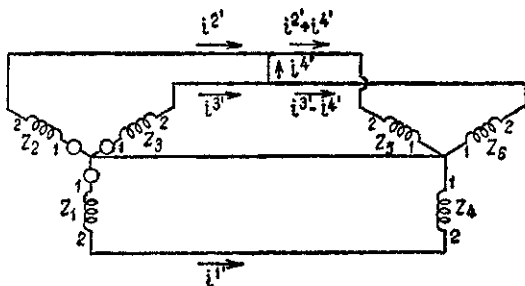


Рис. 13.3. Короткое замыкание на генераторе.

ты примитивной сети

$$z = \begin{array}{c} g \\ 1 \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline z_g & 0 \\ \hline 0 & z_l \\ \hline \end{array}, \quad e = \begin{array}{c} g \\ 1 \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline e_g & 0 \\ \hline \end{array}, \quad (13.42)$$

где z_g задается уравнениями (13.55), а z_l — уравнениями (13.22) и (13.23).

Тензор преобразования есть

$$\begin{array}{l}
 i1 = i1' \\
 i2 = i2' \\
 i3 = -i3' \\
 i4 = i1' \\
 i5 = -i2' - i4' \\
 i6 = -i3' + i4'
 \end{array}
 \quad
 C = \begin{array}{c|cccc}
 & 1' & 2' & 3' & 4' \\
 \hline
 1 & 1 & & & \\
 \hline
 2 & & 1 & & \\
 \hline
 3 & & & 1 & \\
 \hline
 4 & +1 & & & \\
 \hline
 5 & & +1 & & -1 \\
 \hline
 6 & & & -1 & +1
 \end{array}
 = \begin{array}{c|cc}
 & g' & 1' \\
 \hline
 g & 1 & \\
 \hline
 1 & -1 & A
 \end{array}
 \quad (13.43)$$

Геометрические объекты реальной сети определяются по $C_i z C$ и $C_i e$:

$$z' = \begin{array}{c|cc}
 & g' & 1' \\
 \hline
 g' & z_g + z_l & -z_l A \\
 \hline
 1' & -A_l z_l & A_l z_l A
 \end{array}, \quad e' = \begin{array}{c|cc}
 & g' & 1' \\
 \hline
 e_g & & 0
 \end{array} \quad (13.44)$$

10. ГРУППА «СИММЕТРИЧНЫХ СОСТАВЛЯЮЩИХ» G_{sc}

1. Матрица преобразования, возникающая в методе симметричных составляющих, а именно C и C^{-1} , вместе с двумя другими матрицами, определяемые как $CC^{-1} = I$ и $CC = S$, образуют «группу», состоящую из четырех элементов:

$$\begin{array}{c}
 C = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{array}{c|ccc}
 & 0 & 1 & 2 \\
 \hline
 a & 1 & 1 & 1 \\
 \hline
 b & 1 & a^2 & a \\
 \hline
 c & 1 & a & a^2
 \end{array}, \quad C^{-1} \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{array}{c|ccc}
 & a & b & c \\
 \hline
 0 & 1 & 1 & 1 \\
 \hline
 1 & 1 & a & a^2 \\
 \hline
 2 & 1 & a^2 & a
 \end{array}, \\
 \\
 S = \begin{array}{c|ccc}
 & a & b & c \\
 \hline
 a & 1 & 0 & 0 \\
 \hline
 b & 0 & 0 & 1 \\
 \hline
 c & 0 & 1 & 0
 \end{array}, \quad I = \begin{array}{c|ccc}
 & a & b & c \\
 \hline
 a & 1 & 0 & 0 \\
 \hline
 b & 0 & 1 & 0 \\
 \hline
 c & 0 & 0 & 1
 \end{array}. \quad (13.45)
 \end{array}$$

Эти четыре матрицы удовлетворяют четырем условиям, которым подчиняются элементы группы, данным в гл. 11, § 3, а именно:

1. Произведение любых двух элементов есть элемент группы. В этом можно убедиться, образовав «*таблицу умножения*», в которой каждая компонента — произведение двух окаймляющих элементов, соответствующей строки и столбца:

| | | | | | |
|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|---------|
| | C | S | C ⁻¹ | I | |
| C | S | C ⁻¹ | I | C | (13.46) |
| S | C ⁻¹ | I | C | S | |
| C ⁻¹ | I | C | S | C ⁻¹ | |
| I | C | S | C ⁻¹ | I | |

2. Выполняется ассоциативный закон, т. е.

$$C(SC^{-1}) = (CS)C^{-1}.$$

3. Каждый элемент имеет себе обратный (обратный для S есть S).

4. Существует единичный элемент I.

Примечательно, что эта группа из четырех элементов есть подгруппа большого числа других групп, имеющих более четырех элементов. В частности, G_{sc} является подгруппой группы линейных преобразований с комплексными компонентами.

II. Эти четыре матрицы C, S, C⁻¹ и I обладают свойствами, аналогичными свойствам четырех чисел j, -1, -j и 1, которые также образуют группу, т. е. абстрактные свойства C аналогичны свойствам комплексного оператора j, свойства C⁻¹ — аналогичны -j, S аналогичны -1, а I аналогичны 1. Подобие свойств этих групп иллюстрируется подобием их таблиц умножения:

| | | | | | |
|----|----|----|----|----|---------|
| | j | -1 | -j | 1 | |
| j | -1 | -j | 1 | j | (13.47) |
| -1 | -j | 1 | j | -1 | |
| -j | 1 | j | -1 | j | |
| 1 | j | -1 | -j | 1 | |

В этих двух таблицах аналогичные элементы возникают на тех же местах.

Так как матрица S представляет замену фазы вращения обратной от a—b—c к a—c—b (аналогично -1, которая представляет обращение направления), то матрицу последовательности C можно считать представляющей изменение фазы вращения на мнимый угол (аналогично числу j, которое представляет поворот направления на мнимый угол).

В гл. 19, § 14 будет показано, что матрица преобразования \mathbf{C} используется в анализе многообмоточных трансформаторов, соединенных зигзагом, когда взаимосвязаны три фазы. Следовательно, матрица последовательности представляет собой также мнимую взаимосвязь трех фаз.

11. ТРАНСФОРМАТОРЫ СО СДВИГОМ ФАЗ

I. В качестве другого примера преобразований, где тензор преобразований содержит комплексные компоненты, *возьмем сбалансированный трехфазный многообмоточный трансформатор*, в котором электрическая фаза порождает несколько магнитных фаз.

Пусть даны три одинаковых многообмоточных трансформатора и пусть на каждом сердечнике имеется, скажем, четыре различные обмотки. В терминах реактансов утечки X_{a-b} тензор импеданса первого трансформатора есть:

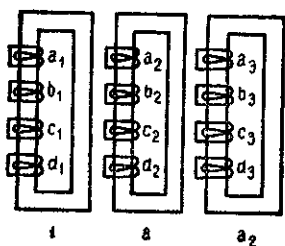


Рис. 13.4. Трехфазные четырехобмоточные трансформаторы.

$$z_i = \begin{array}{c} \begin{array}{c} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ \hline a_1 & 0 & X_{a-b} & X_{a-c} & X_{a-d} \\ \hline b_1 & X_{a-b} & 0 & X_{b-c} & X_{b-d} \\ \hline c_1 & X_{a-c} & X_{b-c} & 0 & X_{c-d} \\ \hline d_1 & X_{a-d} & X_{b-d} & X_{c-d} & 0 \\ \hline \end{array} \end{array} \quad (13.48)$$

Тензор импеданса каждого трансформатора имеет ту же матрицу, в которой оси a, b, c, d имеют другие индексы.

Если катушки этих трех трансформаторов (рис. 13.4) взаимосвязаны каким-либо способом, образуя *сбалансированную* трехфазную сеть, и подсоединены к сбалансированным импедансам, то в каждой электрической фазе протекает тот же ток, что и в других двух фазах, только сдвинутый по времени на 120° или 240° . Подобным образом в обмотках второго трансформатора протекают те же токи, что и в соответствующих обмотках первого, но сдвинуты по времени на 120° , т. е. на $a = e^{j120^\circ}$. В обмотках третьего трансформатора токи сдвинуты относительно тока первого на $a^2 = e^{j240^\circ}$. (Конечно, в каждой обмотке a_1, b_1, c_1 и d_1 первого трансформатора токи находятся не в фазе во времени.) Следовательно, если в первом трансформаторе протекают токи i^a, i^b, i^c, i^d , то во втором трансформаторе — ai^a, ai^b, ai^c, ai^d , в третьем — a^2i^a, a^2i^b, a^2i^c и a^2i^d .

Обычно каждую обмотку представляют прямой линией, в частности, обмотки первого трансформатора, скажем, вертикальными линиями (или горизонтальными), второго трансформатора — линиями, повернутыми на 120° относительно вертикали, третьего — на 240° (рис. 13.5). Когда две обмотки соединены

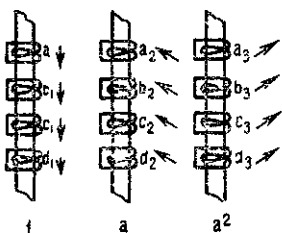


Рис 13.5. Представление фаз.

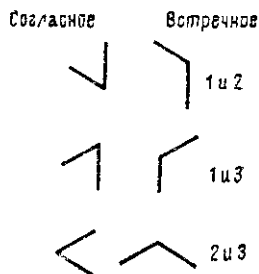


Рис. 13.6. Последовательное соединение.

последовательно, их соединение аналогично соединению на рис. 13.6.

Так как в сбалансированных системах нет нейтральных токов, то токи, протекающие при соединении звездой или треугольником, могут быть приняты, как показано на рис. 13.7. При определении числа контуров можно полагать, что в соединении звездой имеется нейтральный провод.

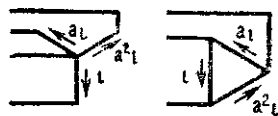


Рис. 13.7.

Следует заметить, что *каждый раз, когда ток поворачивается на 120° по часовой стрелке, он умножается на a .*

II. Пусть теперь 12 обмоток соединены любым способом в трехфазную обмотку, например:

1) a -обмотки — звездой; 2) d -обмотки — треугольником; 3) c -обмотки — звездой; 4) b -обмотки — встречные c -обмоткам; в частности, b -обмотки *третьего* трансформатора соединены встречно c -обмоткам *первого* трансформатора (рис. 13.8) (такое соединение называется «зигзаг»); 5) b -обмотки соединены последовательно с симметричной нагрузкой, соединенной звездой.

12. ПОЛУЧЕНИЕ НОВЫХ ТОКОВ

I. Число новых токов, которые надо рассмотреть, составляет одну треть от числа контуров, поскольку остальные токи являются теми же самыми, только умноженными на a или a^2 . Следовательно, достаточно установить соотношение между старыми и новыми токами, протекающими только в одной трети обмоток, скажем, в обмотках первого трансформатора и в одном из импе-

дансов нагрузки. Аналогично было бы достаточно пренебречь токами намагничивания только в первом трансформаторе.

II. На рис. 13.8, а и б показаны старые и новые токи, протекающие в одной трети обмоток в звездно-треугольном трансформаторе, соединенном зигзагом. Так как число контуров девять, число выбираемых новых токов $9/3=3$, а именно $i^{a'}$, $i^{c'}$, $i^{d'}$. Предположим, что они текут в трех вертикальных обмотках. В четвертой вертикальной обмотке Z_b течет ток $ai^{c'}$, повернутый

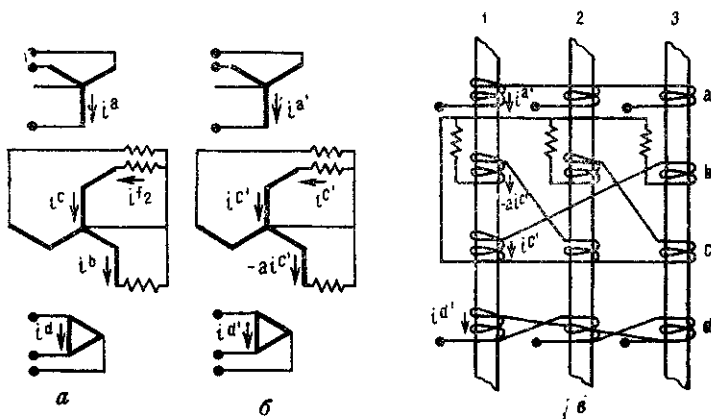


Рис. 13.8. Фазосдвигающий, соединенный зигзагом трансформатор: а — старые токи; б — новые токи; в — действительные соединения.

на 120° относительно $i^{c'}$. Он протекает через Z_b в направлении, противоположном первоначальному i^b , через один из потоков нагрузки от $i^{c'}$. Отсюда следует, что безразлично, какой нагрузочный импеданс рассматривать.

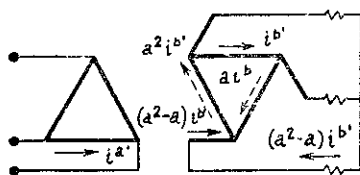
Чтобы определить новые токи во всех других вертикальных линиях, часто необходимо в качестве промежуточного шага определить новые токи в тех или других обмотках, как показано штриховыми линиями в табл. 13.1 и 13.2.

Вообще новые токи должны быть установлены во всех линиях, имеющих одинаковое направление (или во всех вертикальных, или во всех горизонтальных и т. д.), и в одной трети нагрузок.

13. ТЕНЗОР ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

I. При выводе тензора преобразования повторяются те же шаги, что и при анализе неуравновешенного трансформатора, а именно: 1) способ соединения представляется с помощью C_1 ; 2) пренебрежение токами намагничивания представляется через C_2 ;

3) окончательный тензор преобразования $C = C_1 C_2$.



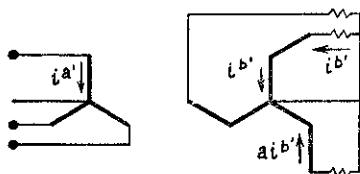
$$C_1 = \begin{matrix} a' & b' \\ a & 1 \\ b & \\ c & a^2 - a \\ 1 & a^2 - a \end{matrix}$$

$$C_2 = \begin{matrix} b'' \\ a' & -N \\ b' & 1 \end{matrix}$$

$$C = \begin{matrix} b'' \\ a & -N \\ b & 1 \\ c & a^2 - a \\ 1 & a^2 - a \end{matrix}$$

$$N = \frac{n_b + (a^2 - a) n_c}{n_a}$$

а



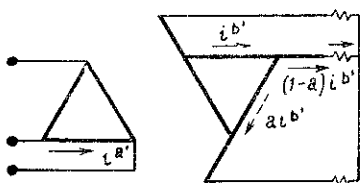
$$C_1 = \begin{matrix} a' & b' \\ a & 1 \\ b & \\ c & -a \\ 1 & 1 \end{matrix}$$

$$C_2 = \begin{matrix} b'' \\ a' & -N \\ b' & 1 \end{matrix}$$

$$C = \begin{matrix} b'' \\ a & -N \\ b & 1 \\ c & -a \\ 1 & 1 \end{matrix}$$

$$N = \frac{n_b - a n_c}{n_a}$$

б



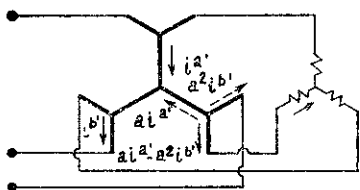
$$C_1 = \begin{matrix} a' & b' \\ a & 1 \\ b & \\ c & 1 - a \\ 1 & 1 - a \end{matrix}$$

$$C_2 = \begin{matrix} b'' \\ a' & -N \\ b' & 1 \end{matrix}$$

$$C = \begin{matrix} b'' \\ a & -N \\ b & 1 \\ c & 1 - a \\ 1 & 1 - a \end{matrix}$$

$$N = \frac{n_b + (1 - a) n_c}{n_a}$$

в



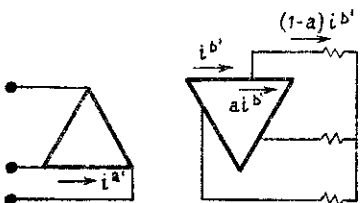
$$C_1 = \begin{matrix} a' & b' \\ a & 1 \\ b & \\ c & -a \\ 1 & -a \end{matrix}$$

$$C_2 = \begin{matrix} b'' \\ a' & -N \\ b' & 1 \end{matrix}$$

$$C = \begin{matrix} b'' \\ a & -N \\ b & 1 \\ c & aN - a^2 \\ 1 & aN - a^2 \end{matrix}$$

$$N = \frac{n_b - a^2 n_c}{n_a - a n_c}$$

г



$$C_1 = \begin{matrix} a' & b' \\ a & 1 \\ b & \\ c & a \\ 1 & 1 - a \end{matrix}$$

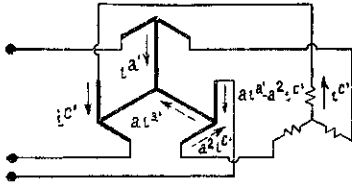
$$C_2 = \begin{matrix} b'' \\ a' & -N \\ b' & 1 \end{matrix}$$

$$C = \begin{matrix} b'' \\ a & -N \\ b & 1 \\ c & a \\ 1 & 1 - a \end{matrix}$$

$$N = \frac{n_b + a n_c}{n_a}$$

д

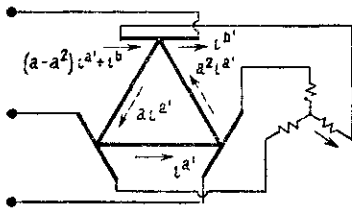
Симметричные трехфазные многообмоточные трансформаторы и их матрицы преобразования: первая колонка — C_1 , показывающая соединение катушек; вторая колонка — C_2 , пренебрегающая токами намагничивания; третья колонка — C , представляющая их результирующую (произведение).



$$C_1 = \begin{matrix} & a' & c' \\ a & 1 & \\ b & a & -a^2 \\ c & & 1 \\ 1 & & 1 \end{matrix} \quad C_2 = \begin{matrix} & c'' \\ a' & -N \\ c' & 1 \end{matrix} \quad C = \begin{matrix} & c'' \\ a & -N \\ b & -aN - a^2 \\ c & 1 \\ 1 & 1 \end{matrix}$$

$$N = \frac{n_c - a^2 n_b}{n_a + a n_b}$$

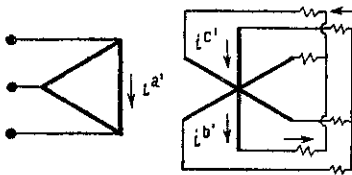
а



$$C_1 = \begin{matrix} & a' & b' \\ a & 1 & \\ b & & 1 \\ c & a - a^2 & 1 \\ 1 & a - a^2 & 1 \end{matrix} \quad C_2 = \begin{matrix} & c'' \\ a' & -N \\ b' & 1 \end{matrix} \quad C = \begin{matrix} & b'' \\ a & -N \\ b & 1 \\ c & (a^2 - a)N + 1 \\ 1 & (a^2 - a)N + 1 \end{matrix}$$

$$N = \frac{n_b + n_c}{n_a + (a - a^2)n_c}$$

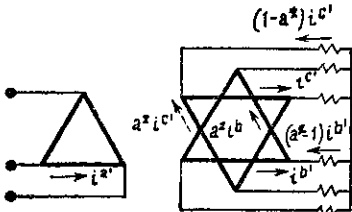
б



$$C_1 = \begin{matrix} & a' & b' & c' \\ a & 1 & & \\ b & & 1 & \\ c & & & 1 \\ 1_1 & & & 1 - a^2 \\ 1_2 & & & a^2 - 1 \end{matrix} \quad C_2 = \begin{matrix} & b'' & c'' \\ a' & -N_1 & -N_2 \\ b' & 1 & \\ c' & & 1 \end{matrix} \quad C = \begin{matrix} & b'' & c'' \\ a & -N_1 & -N_2 \\ b & 1 & \\ c & & 1 \\ 1_1 & 1 & \\ 1_2 & & 1 \end{matrix}$$

$$N_1 = \frac{n_b}{n_a} \quad N_2 = \frac{n_c}{n_a}$$

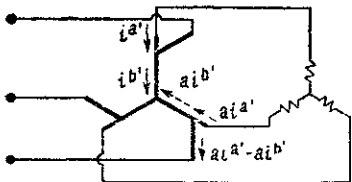
в



$$C_1 = \begin{matrix} & a' & b' & c' \\ a & 1 & & \\ b & & 1 & \\ c & & & 1 \\ 1_1 & & & 1 - a^2 \\ 1_2 & & & a^2 - 1 \end{matrix} \quad C_2 = \begin{matrix} & b'' & c'' \\ a' & -N_1 & -N_2 \\ b' & 1 & \\ c' & & 1 \end{matrix} \quad C = \begin{matrix} & b'' & c'' \\ a & -N_1 & -N_2 \\ b & 1 & \\ c & & 1 \\ 1_1 & & 1 - a^2 \\ 1_2 & & a^2 - 1 \end{matrix}$$

$$N_1 = \frac{n_b}{n_a} \quad N_2 = \frac{n_c}{n_a}$$

г

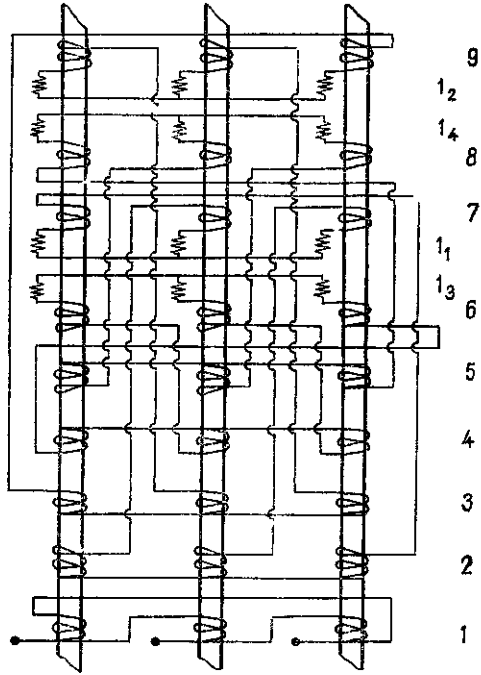
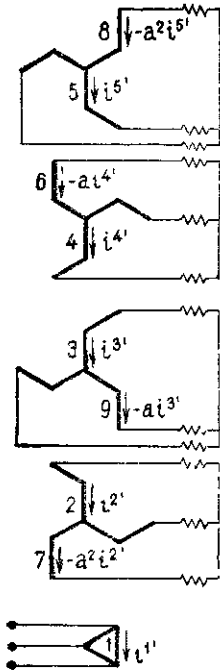


$$C_1 = \begin{matrix} & a' & b' \\ a & 1 & \\ b & & 1 \\ c & a & -a \\ 1 & & 1 \end{matrix} \quad C_2 = \begin{matrix} & b'' \\ a' & -N \\ b' & 1 \end{matrix} \quad C = \begin{matrix} & b'' \\ a & -N \\ b & 1 \\ c & -aN - a \\ 1 & 1 \end{matrix}$$

$$N = \frac{(n_b - a n_c)}{n_a + a n_c}$$

д

Симметричные трехфазные многообмоточные трансформаторы и их матрицы преобразования: первая колонка — C_1 , показывающая соединение катушек; вторая колонка — C_2 , пренебрегающая токами намагничивания; третья колонка — C , представляющая их результирующую (произведение).
а — обращенный двойной зигзаг; **б** — автотрансформатор шлейф-треугольник; **в** — диаметральной звезда; **г** — двойной треугольник; **д** — зигзаг-автотрансформатор.



| | 1' | 2' | 3' | 4' | 5' |
|----------------|----|-----------------|----|----|-----------------|
| 1 | 1 | | | | |
| 2 | | 1 | | | |
| 3 | | | 1 | | |
| 4 | | | | 1 | |
| 5 | | | | | 1 |
| 6 | | | | -a | |
| 7 | | -a ² | | | |
| 8 | | | | | -a ² |
| 9 | | | -a | | |
| 1 ₁ | | 1 | | | |
| 1 ₂ | | | 1 | | |
| 1 ₃ | | | | 1 | |
| 1 ₄ | | | | | 1 |

| | 2'' | 3'' | 4'' | 5'' |
|----|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| 1' | -N ₁ | -N ₂ | -N ₃ | -N ₄ |
| 2' | 1 | | | |
| 3' | | 1 | | |
| 4' | | | 1 | |
| 5' | | | | 1 |

$$N_1 = \frac{n_2 - a^2 n_7}{n_1}$$

$$N_2 = \frac{n_3 - a n_9}{n_1}$$

$$N_3 = \frac{n_4 - a n_5}{n_1}$$

$$N_4 = \frac{n_5 - a^2 n_8}{n_1}$$

| | 2'' | 3'' | 4'' | 5'' |
|----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| 1 | -N ₁ | -N ₂ | -N ₃ | -N ₄ |
| 2 | 1 | | | |
| 3 | | 1 | | |
| 4 | | | 1 | |
| 5 | | | | 1 |
| 6 | | | -a | |
| 7 | | -a ² | | |
| 8 | | | | -a ² |
| 9 | | -a | | |
| 1 ₁ | 1 | | | |
| 1 ₂ | | 1 | | |
| 1 ₃ | | | 1 | |
| 1 ₄ | | | | 1 |

Учетверенный зигзаг — трансформатор и его матрица преобразования С.

Различие между симметричным (уравновешенным) случаем, рассматриваемым здесь, и несимметричным, рассмотренным в гл. II, заключается в том, что в симметричном случае используется только одна треть обмоток и одна треть уравнений.

II. Рассматривая старые и новые токи, протекающие, скажем, в четырех вертикальных линиях (в обмотках первого трансформатора) (рис. 13.8, а) и в одной (любой) из нагрузок, получаем

$$\begin{array}{l}
 i^a = i^{a'} \\
 i^b = -ai^{c'} \\
 i^c = i^{c'} \\
 i^d = i^{d'} \\
 i^f = i^{c'}
 \end{array}
 \quad
 C_1 =
 \begin{array}{c}
 a_1 \\
 b_1 \\
 c_1 \\
 d_1 \\
 f_1
 \end{array}
 \begin{array}{|c|c|c|}
 \hline
 & a' & c' & d' \\
 \hline
 a_1 & 1 & 0 & 0 \\
 b_1 & 0 & -a & 0 \\
 c_1 & 0 & 1 & 0 \\
 d_1 & 0 & 0 & 1 \\
 f_1 & 0 & 1 & 0 \\
 \hline
 \end{array}
 \quad (13.49)$$

Соединение обмоток уменьшает число переменных на фазу с пяти до трех.

Вместо четырех обмоток первого трансформатора, конечно, можно рассматривать любые другие четыре обмотки (но обязательно обозначаемые разными буквами), например, c_2 вместо c_1 и т. д.

III. Уравнение связи, исключаяющее токи намагничивания в первом трансформаторе, до соединения есть

$$n_a i^a + n_b i^b + n_c i^c + n_d i^d = 0. \quad (13.50)$$

При замене старых токов новыми оно становится

$$n_a i^{a'} - n_b a i^{c'} + n_c i^{c'} + n_d i^{d'} = 0.$$

Предполагая, скажем, что $i^{d'}$ в соединении треугольником есть ток намагничивания, который должен быть исключен, уравнение связи можно заменить системой уравнений, определяющих тензор преобразования:

$$\begin{array}{l}
 i^{a'} = i^{a''} \\
 i^{c'} = i^{c''} \\
 i^{d'} = -\frac{n_a}{n_d} i^{a''} + \left(\frac{n_b a}{n_d} - \frac{n_c}{n_d} \right) i^{c''}
 \end{array}
 \quad
 C_2 =
 \begin{array}{c}
 a' \\
 c' \\
 d'
 \end{array}
 \begin{array}{|c|c|}
 \hline
 & a'' & c'' \\
 \hline
 a' & 1 & 0 \\
 c' & 0 & 1 \\
 d' & N_1 & N_2 \\
 \hline
 \end{array}
 \quad (13.51)$$

Следовательно, окончательный тензор преобразования $C_1 C_2$ равен

$$C = \begin{matrix} & \begin{matrix} a'' & c'' \end{matrix} \\ \begin{matrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \\ f_2 \end{matrix} & \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 0 \\ \hline 0 & -a \\ \hline 0 & 1 \\ \hline N_1 & N_2 \\ \hline 0 & 1 \\ \hline \end{array} \end{matrix}, \quad C_t^* = \begin{matrix} & \begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & f_2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} a'' \\ c'' \end{matrix} & \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 0 & 0 & N_1^* & 0 \\ \hline 0 & -a^2 & 1 & N_2^* & 1 \\ \hline \end{array} \end{matrix} \quad (13.52)$$

14. ТЕНЗОР ИМПЕДАНСА

Если тензор преобразования C установлен, остается выполнить те же самые операции, что и в случае любой контурной сети.

I. Тензор импеданса первого четырехобмоточного трансформатора и одной из нагрузок *до соединения есть*

$$Z = \begin{matrix} & \begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & f_2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \\ f_2 \end{matrix} & \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline & Z_{a-b} & Z_{a-c} & Z_{a-d} & \\ \hline Z_{a-b} & & Z_{b-c} & Z_{b-d} & \\ \hline Z_{a-c} & Z_{b-c} & & Z_{c-d} & \\ \hline Z_{a-d} & Z_{b-d} & Z_{c-d} & & \\ \hline & & & & Z \\ \hline \end{array} \end{matrix} \quad (13.53)$$

Вектор приложенных напряжений

$$e = \begin{matrix} & \begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & f_2 \end{matrix} \\ & \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline e_a & 0 & 0 & e_d & 0 \\ \hline \end{array} \end{matrix}, \quad (13.54)$$

где e_a — напряжение между фазой и нейтралью.

II. После соединения и исключения тока намагничивания новые компоненты тензора импеданса, найденные по формуле $C_t^* z C$, есть

$$z' = \begin{matrix} & \begin{matrix} a'' & c'' \end{matrix} \\ \begin{matrix} a'' \\ c'' \end{matrix} & \begin{array}{|c|c|} \hline Z_{a-d}(N_1 + N_1^*) & \begin{array}{l} -aZ_{a-b} + Z_{a-c} + N_2 Z_{a-d} \\ -aN_1^* Z_{b-d} + N_1^* Z_{c-d} \end{array} \\ \hline \begin{array}{l} -a^2 Z_{a-b} + Z_{a-c} + N_2^* Z_{a-d} \\ -a^2 N_1 Z_{b-d} + N_1 Z_{c-d} \end{array} & \begin{array}{l} Z_{b-c} - Z_{b-d}(N_2 a^2 + N_2^* a) \\ + Z_{c-d}(N_2 + N_2^*) + Z \end{array} \\ \hline \end{array} \end{matrix} \quad (13.55)$$

III. Новые токи (т. е. токи в обмотках a и c) находят по формуле $i' = z'^{-1}e'$, где

$$e' = C'_t e = \begin{array}{c} a'' \qquad b'' \\ \boxed{e_a + N_1^* e_d \quad | \quad N_2^* e_d} \end{array} \quad (13.56)$$

IV. Если i' вычислен, то:

1. Токи, протекающие в отдельных обмотках первого трансформатора, находят по формулам $i = C i'$, т. е.

$$i \begin{array}{c} a_1 \quad b_1 \quad c_1 \quad d_1 \quad f_2 \\ \boxed{i^{a''} \quad | \quad -a i^{c''} \quad | \quad i^{c''} \quad | \quad N_1 i^{a''} + N_2 i^{c''} \quad | \quad i^{c''}} \end{array} \quad (13.57)$$

2. Напряжения, индуцированные в отдельных обмотках первого трансформатора, находят по формуле $e = z C i'$ (где $z C$ была уже вычислена при нахождении z')

$$z C i' = \begin{array}{c} a_1 \quad N_1 Z_{a-d} i^{a''} + (-a Z_{a-b} + Z_{a-c} + N_2 Z_{a-d}) i^{c''} \\ b_1 \quad (Z_{a-b} + N_1 Z_{b-d}) i^{a''} + (Z_{b-c} + N_2 Z_{b-d}) i^{c''} \\ c_1 \quad (Z_{a-c} + N_1 Z_{c-d}) i^{a''} + (-a Z_{b-c} + N_2 Z_{c-d}) i^{c''} \\ d_1 \quad Z_{a-d} i^{a''} + (-a Z_{b-d} + Z_{c-d}) i^{c''} \\ f_2 \quad Z i^{c''} \end{array} \quad (13.58)$$

15. ШЕСТИУГОЛЬНЫЙ СДВИГАЮЩИЙ ФАЗУ АВТОТРАНСФОРМАТОР

В качестве другого примера рассмотрим автотрансформатор, изображенный на рис. 13.9.

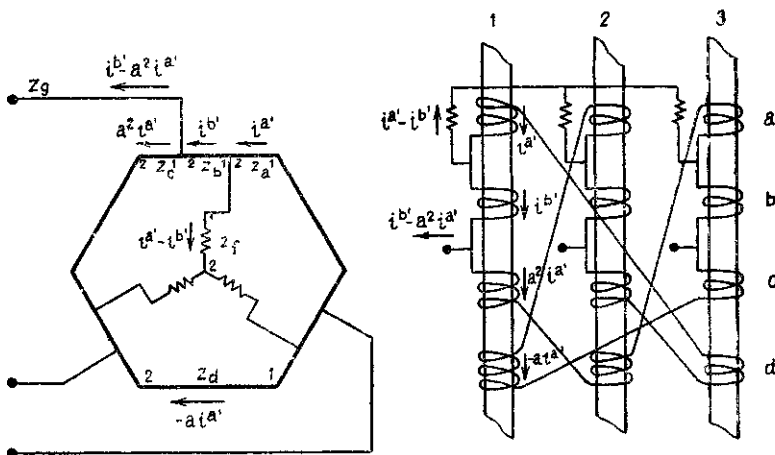


Рис. 13.9. Шестиугольный фазосдвигающий автотрансформатор.

Чтобы учесть падение напряжения на подводящих проводах, необходимо предположить, что последовательно с ними соединен импеданс Z_g нулевой величины. Двенадцать обмоток, нагрузки и проводящие провода образуют шесть контуров, следовательно, достаточно ввести $6/3=2$ новых тока, скажем, $i^{a'}$ и $i^{b'}$. Предположим, что они протекают в двух горизонтальных линиях. Новые токи в оставшихся горизонтальных линиях и в одной нагрузке и подводящем проводе (составляющие одну треть обмоток) также показаны. Соотношения между старыми и новыми токами в обмотках первого трансформатора (горизонтальные линии) есть

$$\begin{aligned}
 i^a &= i^{a'} \\
 i^b &= i^{b'} \\
 i^c &= a^2 i^{a'} \\
 i^d &= -a i^{a'} \\
 i^f &= i^{a'} - i^{b'} \\
 i^g &= -a^2 i^{a'} + i^{b'}
 \end{aligned}$$

| | | | |
|-----|--------|------|---------|
| | a' | b' | |
| a | 1 | 0 | (13.59) |
| b | 0 | 1 | |
| c | a^2 | 0 | |
| d | $-a$ | 0 | |
| e | 1 | -1 | |
| f | $-a^2$ | 1 | |

Уравнения связи для первого трансформатора до соединения имеют вид

$$n_a i^a + n_b i^b + n_c i^c + n_d i^d = 0. \quad (13.60)$$

В терминах новых токов

$$n_a i^{a'} + n_b i^{b'} + n_c a^2 i^{a'} - n_d a i^{a'} = 0$$

или

$$(n_a + a^2 n_c - a n_d) i^{a'} + n_b i^{b'} = 0.$$

Исключив, скажем, $i^{b'}$, получим следующие уравнения преобразования:

$$\begin{aligned}
 i^{a'} &= -n_b / (n_a + a^2 n_c - a n_d) i^{b'} \\
 i^{b'} &= i^{b''}
 \end{aligned}$$

| | | | |
|------|-----|-------|---------|
| | | b'' | |
| a' | N | 1 | (13.61) |
| b' | | | |

Окончательный тензор преобразования

$$C_1 C_2 = C = \begin{array}{c} \mathbf{b}'' \\ \begin{array}{|c|} \hline \mathbf{a} & N \\ \hline \mathbf{b} & 1 \\ \hline \mathbf{c} & Na^2 \\ \hline \mathbf{d} & -Na \\ \hline \mathbf{f} & N-1 \\ \hline \mathbf{g} & -a^2N+1 \\ \hline \end{array} \end{array} \quad (13.62)$$

сводящий четырехобмоточный трансформатор к одной эквивалентной катушке.

Тензор импеданса \mathbf{z} примитивного трансформатора и нагрузки дается уравнением (13.53) с дополнительной строчкой и столбцом \mathbf{g} , с нулевыми элементами. Оставшаяся работа состоит в вычислении $\mathbf{C}^* \mathbf{z} \mathbf{C} = \mathbf{z}'$, нахождении \mathbf{i}' и т. д.

Несколько примеров \mathbf{C} сбалансированных трехфазных трансформаторов даны в табл. 13.1 и 13.2, а для девятиобмоточных трансформаторов — в табл. 13.3.

16. «НАДЧЕРКНУТЫЕ» И «НЕНАДЧЕРКНУТЫЕ» ИНДЕКСЫ

I. Было показано, что, когда тензор преобразования содержит комплексные компоненты, формулы преобразования различных геометрических объектов оказываются более сложными. В частности, формулы преобразования кроме \mathbf{C} содержат и обратную величину \mathbf{C}^{-1} , а также их сопряжения \mathbf{C}^* и \mathbf{C}^{-1*} .

В индексном обозначении введено соглашение, которое используется для отличия \mathbf{C} от ей сопряженной.

Индексы, преобразуемые сопряжениями от \mathbf{C}_α^i , или $\mathbf{C}_\alpha^{i'}$, следует писать с чертой сверху (e_α^i), они называются «надчеркнутыми» индексами. В противном случае индекс остается неизменным и будет называться «ненадчеркнутым» индексом (i^α). Следовательно, в соответствии с формулой преобразования (13.13) $z_{\alpha\beta}$ следует записать как $z_{\alpha\bar{\beta}}$, а $y^{\alpha\beta}$ как $y_{\alpha\bar{\beta}}$.

(Обычно вместо черты используют «точку» (e_α^i), но для печати и написания черта предпочтительнее.)

II. Когда проводится сопряжение геометрического объекта, все «надчеркнутые» индексы становятся «ненадчеркнутыми» и наоборот.

Например:

$$(C_{\alpha'}^\alpha)^* = \overline{C_{\alpha'}^\alpha} \quad \text{или} \quad (e_\alpha^i)^* = e_\alpha^i, \quad (13.63)$$

$$(z_{\alpha\bar{\beta}})^* = z_{\alpha\bar{\beta}} \quad \text{или} \quad (y^{\alpha\bar{\beta}})^* = y^{\alpha\bar{\beta}} \quad (13.64)$$

III. Иначе говоря, в индексном обозначении различаются друг от друга не только *верхние* и *нижние* индексы, но и *надчеркнутые* и *ненадчеркнутые*, что необходимо для указания формул преобразования различных геометрических объектов. Следовательно, *формулы преобразования некоторых тензоров, полученные к настоящему времени*, в случае, если тензор преобразования имеет комплексные компоненты, есть

$$\begin{array}{l|l}
 \mathbf{i} = \mathbf{C}\mathbf{i}' & i^{\alpha} = C_{\alpha}^{\alpha'} i'^{\alpha'} \\
 \mathbf{e} = \mathbf{C}_i^* \mathbf{e}' & e_{\bar{\alpha}} = C_{\bar{\alpha}}^{\bar{\alpha}'} e'_{\bar{\alpha}'} \\
 \mathbf{z}' = \mathbf{C}_i^* \mathbf{z} & z_{\bar{\alpha}'\beta'} = z_{\bar{\alpha}\beta} C_{\bar{\alpha}}^{\bar{\alpha}'} C_{\beta}^{\beta'} \\
 \mathbf{y}' = \mathbf{C}^{-1} \mathbf{y} \mathbf{C}_i^{-1*} & y^{\alpha'\beta'} = y^{\alpha\beta} C_{\alpha}^{\alpha'} C_{\beta}^{\beta'} \\
 \mathbf{C} = \mathbf{C}_1^{-1} \mathbf{C} \mathbf{C}_2 & C_{\alpha''}^{\alpha'} = C_{\alpha'}^{\alpha} C_{\alpha}^{\alpha''}
 \end{array} \quad (13.65)$$

Нужно заметить, что формулы преобразования для тензоров следуют автоматически из их индексов. Можно также заметить, что *везде, где возникает \mathbf{C}_i , он возникает как сопряжение от \mathbf{C}_i^** .

Эти формулы сводятся к формулам, приведенным в уравнении (6.17), где $C_{\alpha}^{\alpha'}$ не содержит комплексных компонент. Формулы преобразования i^{α} и $C_{\alpha}^{\alpha'}$ остались теми же самыми, так как они не содержат надчеркнутых индексов.

Следует особенно подчеркнуть, что каждый член каждого уравнения сбалансирован не только по верхним и нижним индексам, но и по надчеркнутым и ненадчеркнутым, т. е. 1) свободный индекс в каждом члене есть либо надчеркнутый, либо ненадчеркнутый; 2) два немых индекса являются либо надчеркнутыми, либо ненадчеркнутыми.

Инвариантные преобразования, в которых некоторые компоненты тензора преобразования — комплексные числа, будут называться «*спинорными преобразованиями*».

17. ТЕНЗОРНЫЕ И СПИНОРНЫЕ ИНДЕКСЫ

I. Тензоры, в которых могут появляться надчеркнутые и ненадчеркнутые индексы, называются также «*тензорами Эрмита*» (по имени математика Эрмита). Они также называются «*спинорами*»¹⁾. Сами индексы (которые могут быть надчеркнутые и ненадчеркнутые) называются «*спинорными индексами*».

Существуют геометрические объекты, индексы которых не зависят от наличия или отсутствия комплексных компонент в тензоре преобразования. Такие индексы называются «*тензорными индексами*». *Один и тот же геометрический объект может иметь как тензорные, так и спинорные индексы*. Все индексы, исполь-

¹⁾ См. замечания Крона о терминологии во введении 1964 г. (Прим. пер.).

зубые в этой главе, являются *спинорными* индексами. Индексы, используемые в предыдущих главах, были *тензорными*. Когда оба типа индексов возникают в одном и том же тензоре, спинорные индексы могут быть обозначены заглавными, а тензорные — прописными буквами.

II. Таким образом, к настоящему времени введены следующие типы индексов: фиксированные и переменные, свободные и немые, ковариантные и контравариантные, открытые и закрытые, индивидуальные и сложные (компаунд-индексы), надчеркнутые и ненадчеркнутые, тензорные и спинорные.

Каждый из этих индексов связан с различным типом тензора преобразования.

III. Уравнения поведения (в терминах спинорных индексов) контурных, узловых и ортогональных сетей следующие:

$$e_{\bar{\alpha}} = z_{\alpha\bar{\beta}} i^{\bar{\beta}}, \quad (13.66)$$

$$I^{\alpha} = Y^{\alpha\bar{\beta}} E_{\bar{\beta}}, \quad (13.67)$$

$$E_{\bar{\alpha}} + e_{\bar{\alpha}} = z_{\alpha\bar{\beta}} (i^{\bar{\beta}} + \mathbf{1}^{\bar{\beta}}), \quad (13.68)$$

$$i^{\alpha} + I^{\alpha} = Y^{\alpha\bar{\beta}} (E_{\bar{\beta}} + e_{\bar{\beta}}). \quad (13.69)$$

Когда не предполагается использовать тензоры преобразования с комплексными компонентами, спинорные индексы заменяют тензорными (просто опуская черту).

IV. Уравнение мощности в терминах спинорных индексов

$$P = e_{\bar{\alpha}} i^{\alpha} = P = e_{\alpha} i^{\bar{\alpha}} \quad \text{или} \quad P = E_{\alpha} I^{\alpha}. \quad (13.70)$$

Надо помнить, что $e_{\bar{\alpha}}$ и $E_{\bar{\alpha}}$ первоначально имеют надчеркнутые индексы. Следовательно, если они появились без черты, это означает, что они взяты с сопряжением. Следовательно, если индексы в последнем уравнении являются спинорными, они показывают, что при вычислении мощности должно быть сделано сопряжение $e_{\bar{\alpha}}$ и $E_{\bar{\alpha}}$.

18. ВЗВЕШЕННЫЕ ТЕНЗОРЫ ¹⁾

В предыдущих параграфах тензор был определен как геометрический объект, формула преобразования которого содержит только $C_{\alpha'}^{\alpha}$ или обратную $C_{\alpha}^{\alpha'}$ по одной на каждый индекс.

Когда формула преобразования тензора содержит в дополнение к $C_{\alpha'}^{\alpha}$ и $C_{\alpha}^{\alpha'}$ также скаляр (скажем, число или функцию), то он называется «псевдотензором». Например, если

$$z_{\alpha'\beta'} = z_{\alpha\beta} C_{\alpha'}^{\alpha} C_{\beta'}^{\beta} k, \quad (13.71)$$

где k может быть 5 или $\log x$, то $z_{\alpha\beta}$ есть не тензор, а псевдотензор.

¹⁾ Два следующих параграфа могут быть опущены при первом чтении.

Важен специальный случай псевдотензоров. Если скаляр k равен детерминанту с матрицы $C_{a'}^a$, возведенному в степень p , то псевдотензор называется взвешенным тензором, или тензором веса p . В физических проблемах «тензор веса один» называется также «тензорной плотностью» и имеет особую важность. Таким образом, если:

$$\begin{aligned} k &= \text{какая-либо функция} \rightarrow \text{псевдотензор,} \\ k &= c^p && \rightarrow \text{тензор веса } p, \\ \tilde{k} &= c && \rightarrow \text{тензорная плотность.} \end{aligned}$$

Взвешенные спиноры в своих формулах преобразования имеют также c^* , возведенную в степень q .

В задачах электротехники взвешенные тензоры возникают тогда, например, когда делается переход от трехфазных к однофазным или двухфазным величинам, вообще всякий раз, когда временно ограничиваются рассмотрением части системы.

19. ВЗВЕШЕННЫЕ СПИНОРЫ

1. Взвешенный спинор вводится, когда используется первоначальное определение метода симметричных составляющих, т. е. когда новые переменные последовательности i^0 , i^1 и i^2 представляют фазовые токи без множителя $\sqrt{3}$. Часто такое определение удобно. В этом случае

$$C = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix} & \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & a^2 & a \\ \hline 1 & a & a^2 \\ \hline \end{array} \end{matrix}, \quad C^{-1} = \frac{1}{3} \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & a & a^2 \\ \hline 1 & a^2 & a \\ \hline \end{array} \end{matrix}, \quad (13.72)$$

т. е. в определении C опущен множитель $1/\sqrt{3}$.

Благодаря этой разнице в определении C первоначальное выражение для мощности в терминах величин последовательности

$$P' = e_0 i^0 + e_1 i^1 + e_2 i^2 \quad (13.73)$$

представляет собой входную мощность одной фазы, а не всей системы. С другой стороны, мощность в терминах фазовых величин

$$P = e_a i^a + e_b i^b + e_c i^c \quad (13.74)$$

представляют входную мощность всех трех фаз. Следовательно, в первоначальном определении уравнения инвариантности мощности

$$P = e_a i^a \equiv 3e_{a'} i^{a'} = e_{a'} i^{a'} k = P' \quad (13.75)$$

содержится скаляр $k=3$.

Так как линейная форма для мощности содержит скаляр, формулы преобразования различных спиноров будут содержать этот скаляр в какой-либо форме.

II. Первоначально предполагалось, что переменная i^α преобразуется с помощью данной C_α^a , как $i^\alpha = C_\alpha^a i^{a'}$ и не содержит скаляр. Подставляя ее в уравнение (13.75), получаем

$$e_\alpha C_\alpha^a i^{a'} \equiv e_\alpha i^{a'} k, \quad e^* C_i = e'^* i' k.$$

Сокращая на $i^{a'}$, получаем

$$e_\alpha C_\alpha^a = e_\alpha k, \quad e^* C = e'^* k.$$

Умножая обе части на обратную C_α^a матрицу, имеем

$$e_\alpha = e_\alpha C_\alpha^a k, \quad e^* = C_i^{-1} e'^* k.$$

Производя сопряжение обеих частей, получаем

$$\begin{aligned} e_\alpha^- &= k e_\alpha^- C_\alpha^{\bar{a}'}, & e &= k C_i^{-1*} e'; \\ e_\alpha^- &= 3 e_\alpha^- C_\alpha^{\bar{a}'}, & e &= 3 C_i^{-1*} e'. \end{aligned} \tag{13.76}$$

Следовательно, e_α^- — взвешенный спинор.

Детерминант матрицы преобразования $C_\alpha^{\bar{a}'} = C^{-1*}$ равен $a - a^2 = j\sqrt{3} = c$. Следовательно, скаляр $k = 3$ равен cc^* . Надо заметить, что величина $3C_i^{-1*}$ в точности равна C , следовательно, в первоначальном определении вектор напряжения преобразуется так же, как и вектор тока.

III. Чтобы найти формулу преобразования $z_{\alpha\beta}^-$ как взвешенного спинора, используют рассуждения § 3. Дано $e_\alpha^- = z_{\alpha\beta}^- i^\beta$; заменяем i^β с помощью $C_{\beta'}^\beta, i^{\beta'}$ и $e_{\alpha'}^-$ на $e_{\alpha'}^- C_{\alpha'}^{\bar{a}'} k^*$

$$\begin{aligned} e_{\alpha'}^- C_{\alpha'}^{\bar{a}'} k^* &= z_{\alpha\beta}^- C_{\beta'}^\beta i^{\beta'} \\ e_{\alpha'}^- &= z_{\alpha\beta}^- C_{\alpha'}^{\bar{a}'} C_{\beta'}^\beta k^* = i^{\beta'} z_{\alpha\beta}^-. \end{aligned} \tag{13.77}$$

Так как в новой системе координат $e_{\alpha'}^- = z_{\alpha'\beta'}^- i^{\beta'}$, формула преобразования имеет вид $z_{\alpha\beta}^-$

$$z_{\alpha'\beta'}^- = z_{\alpha\beta}^- C_{\alpha'}^{\bar{a}'} C_{\beta'}^\beta k^{*-1}, \tag{13.78}$$

показывая, что $z_{\alpha\beta}^-$ является взвешенным спинором.

IV. Следовательно, если сохраняется первоначальное определение метода симметричных составляющих, то все спиноры становятся взвешенными спинорами, поскольку в трехфазных задачах внимание ограничено только одной фазой.

Глава 14

УЗЛОВЫЕ СЕТИ

1. ДУАЛИЗМ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОБЛЕМ

1. При анализе физических явлений обнаруживается, что многие (если не все) измеримые величины, законы и методы рассуждений встречаются *парами*, т. е. находятся в определенных *взаимных* отношениях. Электрическое и магнитное поле, волны и частицы, материя и энергия и пр. — все это проявления двойственной стороны природы. В электротехнических задачах также существуют двойственные отношения, например между напряжением и током, импедансом и адмиттансом, параллельным и последовательным соединениями и т. д.

Преимущество признания таких двойственных свойств состоит в том, что все *уравнения, все рассуждения можно продублировать в терминах двойственных величин без того, чтобы приводить те же доказательства еще раз, и в том, что новые отношения можно легко обнаружить простой аналогией.*

II. Будет показано, что, как только методы рассуждения и уравнения установлены для контурных сетей, их можно повторить в двойственной форме для узловых сетей. При рассуждениях и в уравнениях нужно поменять местами следующие двойственные выражения:

1) контур и узловую пару (не узел); 2) катушку и узел; 3) короткозамкнутую и открытую цепь; 4) последовательное и параллельное (соединение); 5) напряжение и ток; 6) импеданс и адмиттанс; 7) ковариантность и контравариантность.

III. Среди введенных геометрических объектов существуют следующие двойственные величины:

- 1) двойственным для ϵ является $I(e_{\alpha}^- \rightarrow I^{\alpha})$;
- 2) двойственным для i является $E(i^{\alpha} \rightarrow E_{\alpha}^-)$;
- 3) двойственным для z является $Y(z_{\alpha\beta}^- \rightarrow Y^{\alpha\beta})$;
- 4) двойственным для C является $C_i^{\alpha-1}(C_{\alpha}^{\alpha} \rightarrow C_{\alpha}^{\alpha-})$.

2. ЧИСТО УЗЛОВЫЕ СЕТИ

I. Сначала детально проанализируем случай, когда n катушек расположены в n узловых парах. Анализ n катушек, объединенных менее чем в n узловых пар, является частным случаем (хотя гораздо более важным практически) чисто узловой сети.

Снова на физическую природу соединенных вместе катушек налагается единственное ограничение: они являются линейными

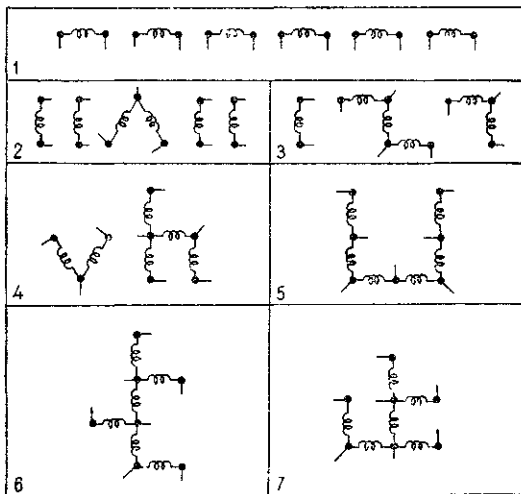


Рис. 14.1. Различные типы соединений шести катушек в шесть узловых пар.

и Y не есть функция от I или E . На природу их взаимосоединений устанавливается ограничение: они в рассматриваемый момент времени не изменяются. Иначе говоря, компоненты тензора преобразования S являются константами, а не функциями времени.

II. На рис. 14.1 показаны семь различных способов расположения шести катушек, образующих сети с шестью узловыми парами.

Следует вспомнить, что число узловых пар равно числу узлов минус число независимых подсетей.

Узловая пара состоит из любых двух узлов, выбранных произвольно в одной и той же подсети. Предполагается, что между этими двумя узлами возникает разность потенциалов E' и что ток I' поступает в сеть через первый узел и тот же ток I' покидает сеть во втором узле узловой пары.

III. При изучении контурных сетей было показано, что «ток в ветви» можно заменить гипотетическим «контурным током»,

если предположить, что токи ветвей продолжают свое течение в замкнутой цепи.

Эта замена *не изменяет уравнений*, а меняет лишь физическую интерпретацию тока I .

Подобное изменение *физической интерпретации* I можно сделать в узловых сетях, если предположить, что «узловой ток», поступающий в сеть в узловых парах, продолжает свое течение через сеть. *Гипотетическая цепь, проходящая в сети от одного из узлов узловой пары к другому, называется «открытым контуром».*

Так же, как гипотетический «контурный ток» имеет физический смысл потока, протекающего в соответствующей ветви, так гипотетический «ток открытого контура» имеет физический смысл только на концах соответствующей ему узловой пары.

Способ определения открытого контура, принадлежащего узловой паре, будет показан при изучении ортогональных сетей.

IV. При выводе уравнений предположим, что известные токи I приложены к отдельным катушкам, собственные и взаимные адмиттансы Y которых также известны. Будут исследованы разности потенциала E , которые возникают на катушках из-за приложенных токов I . Для этого необходимо вывести *уравнение тока* $I = Y'E'$, выраженное через узловые пары; тогда его можно решить относительно E' (если не понадобится никаких других манипуляций). Значит, *«переменными» теперь вместо контурных токов I' являются напряжения на узловых парах E' .*

Хотя имеется n катушек и n известных приложенных к ним токов, тем не менее n неизвестных разностей потенциалов, возникающих на n катушках, не являются независимыми друг от друга. Достаточно вывести и решить уравнение для стольких разностей потенциалов, сколько имеется узловых пар, а остальные можно через них немедленно определить. Ситуация аналогична той, которая возникает в контурных сетях, где имеется n катушек и n известных приложенных напряжений, а n неизвестных токов можно найти *выводом и решением уравнений лишь для стольких токов, сколько имеется контуров.*

V. Вместо того чтобы рассматривать I как приложенный ток, а E — как обусловленную им разность потенциала, задачу можно поставить таким образом, что I — ток, протекающий через два узла различных катушек под действием напряжения E на каждой катушке. Или же задачу можно поставить так, что I — ток, протекающий в некоторых внешних нагрузках Z_L или Y_L (которые, однако, не появляются в уравнении или на диаграмме), а E — разность потенциалов, появляющихся на нагрузках. Чтобы подчеркнуть аналогию с контурным анализом, где e рассматривается как воздействующая величина, а i — как величина отклика при выводе уравнений, предпочтем первый способ постановки. Поэтому в узловых сетях I является воздействующей

величиной, а E — величиной отклика. Конечно, при *манипулировании* с уравнениями возможен любой вариант воздействующих и откликающихся величин.

3. ИНВАРИАНТНОСТЬ МОЩНОСТИ

I. Следует заметить, что если одинаковые токи I приложены к двум узлам каждой из соответствующих катушек различных сетей (рис. 14.1), то на соответствующих катушках возникают одинаковые разности потенциала E , поскольку через каждую катушку может протекать лишь приложенный к ней ток, тогда как остальные катушки являются разомкнутыми цепями. Поэтому входная мощность $I E$, линейная форма, остается «инвариантной» при различных взаимосоединениях n катушек в n узловых пар:

$$I E = I' E', \quad I^u E_u = I'^u E'_u. \quad (14.1)$$

II. Точно так же, как в чисто контурных сетях, все различные типы сетей на рис. 14.1 имеют одно и то же уравнение $I = Y E$, если разности потенциалов E_u , возникающие на каждой катушке, рассматриваются как неизвестные переменные. Но как только другие E_u выбираются как переменные, уравнения становятся разными для каждой сети.

Другими словами, ключом к возможности преобразования уравнения поведения любой сети, скажем первой (см. рис. 14.1), в уравнение любой другой чисто узловой сети является то, что каждая сеть имеет одну и только одну систему координат, в которой уравнение наложенных электромагнитных величин является одним и тем же.

Таким образом, все сети различны, но уравнения наложенных электромагнитных явлений одинаковы для разных сетей, если одна частная система координат выбрана для каждой сети. Эти частные координатные системы (узловые пары в отдельных катушках) служат теми «мостами», по которым можно перейти от одной сети к любой другой.

4. ТЕНЗОР АДМИТТАНСА Y

I. Пусть дана чисто узловая сеть (рис. 14.2, а), в которой к каждой катушке приложен разный набор токов I . Ее примитивная узловая сеть показана на рис. 14.2, б, она имеет асимметричные взаимные адмиттансы между, скажем, Y^{bb} , Y^{dd} и Y^{cc} , Y^{gg} .

Метод анализа узловых сетей повторяет шаг за шагом анализ контурных сетей с той разницей, что взаимно заменяются двойственные величины (показанные в § 1).

II. Первый шаг состоит в установлении геометрических объектов и уравнения поведения примитивной узловой сети. Ее уравнение тока

$$I = Y \cdot E, \quad I^u = Y^{uv} E_v, \quad (14.2)$$

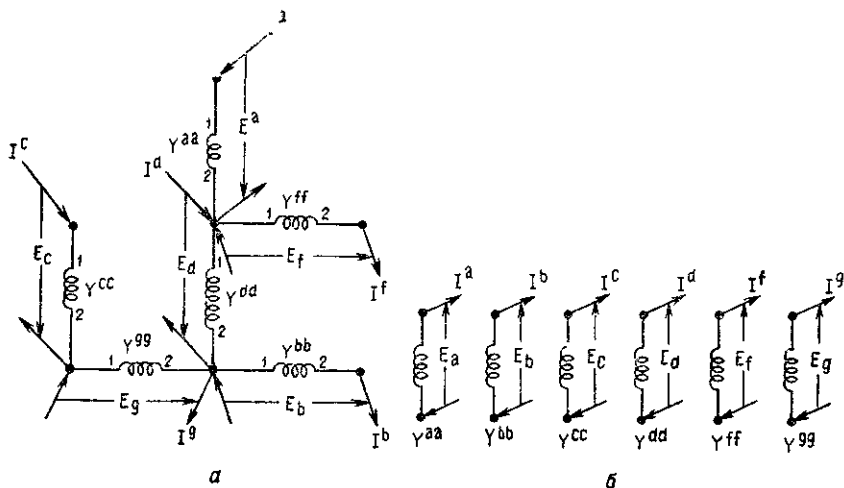


Рис. 14.2.
 а — заданная узловaя сеть; б — ее примитивная сеть.

где

$$I = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline & a & b & c & d & f & g \\ \hline & I^a & I^b & I^c & I^d & I^f & I^g \\ \hline \end{array}; \quad (14.3)$$

$$E = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline & a & b & c & d & f & g \\ \hline & E_a & E_b & E_c & E_d & E_f & E_g \\ \hline \end{array}; \quad (14.4)$$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline & a & b & c & d & f & g \\ \hline a & \gamma_{aa} & & & & & \\ \hline b & & \gamma_{bb} & & \gamma_{bd} & & \\ \hline c & & & \gamma_{cc} & & & \gamma_{cg} \\ \hline d & & \gamma_{db} & & \gamma_{dd} & & \\ \hline f & & & & & \gamma_{ff} & \\ \hline g & & & \gamma_{gc} & & & \gamma_{gg} \\ \hline \end{array} \quad (14.5)$$

III. Эффект взаимосоединения катушек заключается во введении дополнительных узловых пар, в которых могут быть приложены токи или с помощью которых могут быть соединены нагрузки.

Следует заметить, что в примитивной сети (рис. 14.2, б) токи нельзя приложить ни в одной из точек, кроме тех, которые показаны.

В новой сети (см. рис. 14.2) имеется огромное число способов, с помощью которых можно выбрать шесть новых узловых пар; к ним приложены новые токи I' . Выбор зависит от требования задачи. Пусть произвольно выбраны шесть *независимых* узловых пар (рис. 14.3). Следует заметить, что каждый узел охватывается по крайней мере один раз.

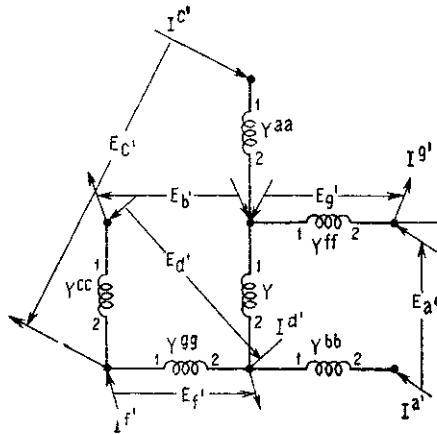


Рис. 14.3. Введенные узловые пары.

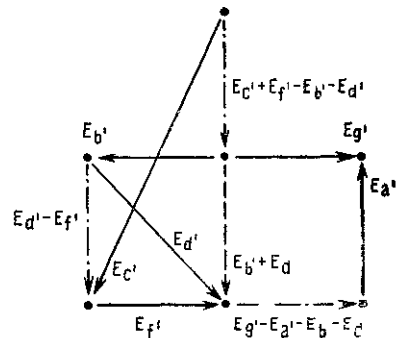


Рис. 14.4. Разности потенциалов на отдельных катушках.

Необходимо помнить, что если два узла каждой катушки выбраны как узловые пары новой сети, то уравнение тока примитивной сети $I = Y \cdot E$ можно использовать для новой сети без каких-либо изменений.

IV. Чтобы установить отношение между старыми и новыми напряжениями E и E' , сначала необходимо найти *разности потенциалов, возникающих на каждой отдельной катушке, в терминах новых приложенных напряжений*.

Для этого шага используется второй закон Кирхгофа: *сумма напряжений по замкнутому контуру равна нулю*.

Разности потенциалов, возникающие на каждой катушке, рассчитаны на рис. 14.4 следующим образом:

1) сначала между узловыми парами изображают предполагаемые новые напряжения E' с соответствующими знаками;

2) затем, предполагая, что *сумма разностей потенциала в любой замкнутой цепи равна нулю*, находят напряжение между двумя концами каждой катушки через новые напряжения E_a , E_b и т. д. Замкнутая цепь не обязательно проходит через катушки (т. е. замкнутые цепи не образуют контуров).

V. Приравняв разности потенциалов, возникающие на каждой катушке до и после взаимосоединения, можно установить следующие уравнения:

$$\begin{array}{rcl}
 E_a = & -E_{b'} + E_{c'} - E_{d'} + E_{f'} & \\
 E_b = & -E_{a'} - E_{b'} & -E_{d'} + E_{g'} \\
 E_c = & & +E_{d'} - E_{f'} \\
 E_d = & E_{b'} & +E_{d'} \\
 E_f = & & +E_{g'} \\
 E_g = & & E_{f'}
 \end{array}
 \quad
 C_t^{-1} =
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{|c|c|c|c|}
 \hline
 a' & b' & c' & d' & f' & g' \\
 \hline
 a & -1 & 1 & -1 & 1 & \\
 \hline
 b & -1 & -1 & & -1 & 1 \\
 \hline
 c & & & & 1 & -1 \\
 \hline
 d & & 1 & & 1 & \\
 \hline
 f & & & & & 1 \\
 \hline
 g & & & & & 1 \\
 \hline
 \end{array}
 \end{array}
 \quad (14.6)$$

представляющие собой уравнение преобразования переменных

$$E = C_t^{-1} E', \quad E_u = C_u'' E_{u'}. \quad (14.7)$$

Следовательно, коэффициенты при новых переменных представляют собой транспонированный обратный тензор преобразования C_t^{-1} . Определитель его матрицы не равен нулю.

VI. Как только установлен обратный тензор преобразования C^{-1} , находят новые компоненты геометрических объектов новой сети Y' и I' .

Новые компоненты тензора адмиттанса находят следующим образом:

$$Y' = C^{-1} Y C_t^{-1}, \quad Y^{u'v'} = Y^{uv} C_u'' C_v', \quad (14.8)$$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}
 \hline
 & a' & b' & c' & d' & f' & g' \\
 \hline
 a' & Y_{bb} & Y_{bb} - Y_{bd} & 0 & Y_{bb} - Y_{bd} & 0 & -Y_{bb} \\
 \hline
 b' & Y_{bb} - Y_{db} & Y_{aa} + Y_{bb} - Y_{bd} & -Y_{aa} & Y_{aa} + Y_{bb} - Y_{bd} & -Y_{aa} & -Y_{bb} + Y_{db} \\
 \hline
 c' & 0 & -Y_{aa} & Y_{aa} & -Y_{aa} & Y_{aa} & 0 \\
 \hline
 d' & Y_{bb} - Y_{db} & Y_{aa} + Y_{bb} - Y_{bd} & -Y_{aa} & Y_{aa} + Y_{bb} - Y_{bd} & -Y_{aa} - Y_{cc} & -Y_{bb} + Y_{db} \\
 \hline
 f' & 0 & -Y_{aa} & Y_{aa} & -Y_{aa} - Y_{cc} + Y_{gc} & Y_{aa} + Y_{cc} - Y_{cg} - Y_{gc} + Y_{gg} & 0 \\
 \hline
 g' & -Y_{bb} & -Y_{bb} + Y_{bd} & 0 & -Y_{bb} + Y_{bd} & 0 & Y_{bb} + Y_{ff} \\
 \hline
 \end{array}
 \end{array}
 \quad (14.9)$$

Если взаимные адмиттансы одинаковы в обоих направлениях, эта матрица — симметричная.

5. ВЕКТОР ТОКА I'

I. Новые компоненты вектора тока I' находят как

$$I' = C^{-1}I, \quad I^{u'} = C_u^{u'} I^u, \quad (14.10)$$

$$I' = \begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline a' & b' & c' & d' & f' & g' \\ \hline -I^b & -I^a - I^b + I^d & I^a & -I^a - I^b + I^c + I^d & I^a - I^c + I^g & I^b + I^f \\ \hline \end{array} \\ (14.11) \end{array}$$

$$I' = \begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline a' & b' & c' & d' & f' & g' \\ \hline I^{a'} & I^{b'} & I^{c'} & I^{d'} & I^{f'} & I^{g'} \\ \hline \end{array} \\ (14.12) \end{array}$$

Значит, если к отдельным катушкам приложены I^a, I^b , то через различные узловые пары (вход в один узел и выход из другого узла) протекают $-I^b, -I^a - I^b + I^d$ и т. д.

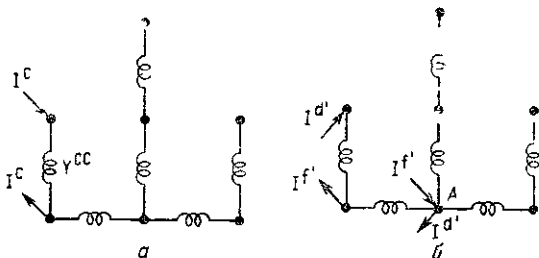


Рис. 14.5.

a — ток, примененный к катушке; b — ток через катушку в терминах токов узловых пар.

Адмиттансы тех катушек, токи которых встречаются в узле, образуя узловую ток, формируют диагональные составляющие адмиттанс-тензора Y' . Например, согласно уравнению (14.12) $I^{f'}$ построен из $I^a, -I^c$ и I^g ; следовательно, три адмиттанса Y_{aa}, Y_{cc}, Y_{gg} (и любой взаимный адмиттанс между ними) образуют $I^{f'}$ диагональную компоненту Y' . (В контурных сетях импедансы тех катушек, примененное напряжение к которым добавляется к контурному напряжению, образуют диагональные компоненты импеданса z' .)

II. Этот последний шаг вычисления I' из I используется всякий раз, когда ток применен (или нагрузка присоединена) не через узловую пару, а через катушку. Например, может случиться, что единственным примененным током в данном примере (рис. 14.5) будет ток I^c . Однако два узла катушки Y_{cc} не рассматриваются как узловая пара, напряжение в которой выбрано

в качестве переменной, поэтому I^c не может рассматриваться как компонента I' . Значение I' с одним приложенным I^c есть $C^{-1}I$, т. е.

$$I' = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline & a' & b' & c' & d' & f' & g' \\ \hline & 0 & 0 & 0 & I^c & -I^c & 0 \\ \hline \end{array}. \quad (14.13)$$

Иначе говоря, I^c образует часть из двух различных приложенных узловых токов аналогично контурным сетям, где одно приложенное последовательно с катушкой напряжение может образовать часть из нескольких контурных напряжений. На рис. 14.5, б показано, как I^c образует приложенные токи в двух узловых парах d' и f' . *Результирующий* ток через узел А, конечно, равен нулю.

III. Если два узла, через которые протекает приложенный ток, не образуют узловую пару и не соединены вместе катушкой, то предполагается, что два узла соединены катушкой с нулевым адмиттансом так, что в примитивной сети имеется одна дополнительная катушка. Это предположение аналогично тому, которое используется в контурных сетях, где при отсутствии действительной катушки предполагается катушка с нулевым импедансом, последовательно соединенная с приложенным напряжением. (Можно предположить, что два узла, не связанные катушкой, но имеющие воздействующие на них токи, образуют «безадмиттансную ветвь» или «кажущуюся катушку».)

IV. Уравнение тока, представляющее шесть обычных уравнений, устанавливается и записывается как

$$I' = Y'E', \quad I^u = Y^{u'v'}E_{v'}. \quad (14.14)$$

Во многих практических задачах это уравнение подразделяется по крайней мере на два инвариантных уравнения.

V. Когда известны токи I' , протекающие через узловые пары, разности потенциала E' , возникающие на узловых парах, находят по формуле

$$E' = Z'I', \quad E_{v'} = Z_{v'u'}i^{u'}, \quad (14.15)$$

где Z' — обратная Y' .

Как только известны разности потенциалов в узловых парах E' найдены, с их помощью можно рассчитать величины, существующие в каждой отдельной катушке.

VI. Разности потенциала, возникающие на каждой отдельной катушке, находят по уравнению преобразования E

$$E = C_t^{-1}E', \quad E_u = C_u^{u'}E_{u'}, \quad (14.16)$$

уже приведенному в уравнении (14.6).

Токи I , протекающие в отдельных катушках, находят из $I = YE$ заменой I на I_c и E на $C_t^{-1}E'$, получая

$$I_c = Y C_t^{-1}E', \quad I^u = Y^{u'v'} C_u^{u'} E_{v'}, \quad (14.17)$$

где матрица YC_t^{-1} была уже рассчитана в уравнении (14.9) (в чисто узловой сети I и I_c численно равны). Следовательно,

$$I_c = \begin{array}{|l|} \hline a & Y^{aa}(-E_{b'} + E_{c'} - E_{d'} + E_{f'}) \\ \hline b & Y^{bb}(-E_{a'} - E_b - E_{d'} + E_{g'}) + Y^{bd}(E_{b'} + E_{d'}) \\ \hline c & Y^{cc}(E_{d'} - E_{f'}) + Y^{cg}E_{f'} \\ \hline d & Y^{dd}(E_{b'} + E_{d'}) + Y^{db}(-E_{a'} - E_b - E_{d'} + E_{g'}) \\ \hline f & Y^{ff}E_{g'} \\ \hline g & Y^{gg}E_{f'} + Y^{gc}(E_{g'} - E_{f'}) \\ \hline \end{array} \quad (14.18)$$

VII. Если тензор преобразования C_t^{-1} является сингулярным, собственные и взаимные импедансы отдельных катушек Z находят по импедансам узловых пар Z' из соотношения

$$Z = C_t^{-1} Z' C^{-1}, \quad Z_{uv} = Z_{u'v'} C_u^{u'} C_v^{v'}. \quad [(14.19)]$$

6. СВОДКА ЭТАПОВ

Этапы установления тока любой узловой сети параллельны этапам вывода уравнения напряжения контурной сети, за исключением того, что *каждое понятие заменяется «двойственным» ему понятием.*

I. Сначала устанавливаются примитивная узловая сеть и ее геометрические объекты Y , I и E .

1. Примитивная сеть состоит из всех разомкнутых катушек данной сети.

2. Установлен тензор адмиттанса Y примитивной сети, содержащий собственные и взаимные адмиттансы отдельных катушек.

3. Вектор тока I содержит поступающие и покидающие каждую катушку токи.

4. Вектор напряжений E содержит неравные разности потенциалов (известные и неизвестные), возникающие на каждой катушке.

II. Следующий шаг состоит в получении транспонированного обратного тензора преобразования C_t^{-1} , превращающего примитивную сеть в действительную.

1. Выберем в системе столько независимых разностей потенциалов E' между разными узлами, сколько имеется узловых пар. Две конечные точки каждого напряжения представляют узловую пару.

2. *Запишем вдоль каждой катушки разности возникающих на них потенциалов, выраженных через выбранные новые E' , используя второй закон Кирхгофа.*

3. Приравняем старые и новые напряжения, возникающие на каждой отдельной катушке. Имеется столько уравнений, сколько катушек. Левая часть содержит старые напряжения, а правая — новые напряжения.

4. Коэффициенты при новых напряжениях E' образуют транспонированный обратный тензор преобразования C_t^{-1} , математически представляющий второй закон Кирхгофа.

III. Следующий шаг состоит в том, чтобы найти новые компоненты геометрических объектов Y' и I' и уравнение тока новой системы.

1. Тензор адмиттанса Y' находят по формуле преобразования

$$Y' = C^{-1} Y C_t^{-1}, \quad Y^{u'v'} = Y^{uv} C_u^{u'} C_v^{v'}. \quad (14.20)$$

2. Токи, приложенные к новым узловым парам, находят по формуле преобразования

$$I' = C^{-1} I, \quad I^{u'} = C_u^{u'} I^u. \quad (14.21)$$

3. Уравнение тока новой сети устанавливают как

$$I' = Y' E', \quad I^{u'} = Y^{u'v'} E_{v'}. \quad (14.22)$$

IV. Однажды установленное уравнение поведения пригодно для всех типов манипуляций в зависимости от имеющейся задачи.

Когда с уравнением тока работают как с единым целым, не подразделяя его, неизвестные разности потенциалов, возникающие на выбранных узловых парах, находят в два этапа:

1) рассчитывают обратный тензор адмиттанса, который является тензором импеданса:

$$Z' = Y'^{-1}, \quad Z_{v'u'} = (Y^{u'v'})^{-1}; \quad (14.23)$$

2) неизвестные разности потенциалов находят как

$$E' = Z' I', \quad E_{v'} = Z_{v'u'} I^{u'}. \quad (14.24)$$

Неизвестные величины для отдельных катушек можно найти с помощью E' следующим образом:

3) разности потенциала на отдельных катушках E находят как

$$E = C_t^{-1} E', \quad E_v = C_v^{v'} E_{v'}; \quad (14.25)$$

4) токи, протекающие в отдельных катушках, находят как

$$I_c = Y C_t^{-1} E', \quad I^u = Y^{u'v'} C_v^{v'} E_{v'}, \quad (14.26)$$

где $Y C_t^{-1}$ уже были рассчитаны при нахождении Y' ;

5) собственные и взаимные импедансы отдельных катушек суть

$$Z_c = C_t^{-1} Z' C^{-1}, \quad Z_{uv} = Z_{u'v'} C_u^{u'} C_v^{v'}. \quad (14.27)$$

V. При прямом обозначении значительно удобнее заменить C_t^{*-1} во всех уравнениях новым символом, скажем А. В терминах А все формулы преобразования контурных сетей можно использовать для соответствующих двойственных величин узловых сетей, если C_t^{*-1} везде заменена на А и точно так же C^{-1} на A_t^* и т. д. Например:

$$z' = C_t^* z C \rightarrow Y' = A_t^* Y A, \quad (14.28)$$

$$y_c = C y' C_t^* \rightarrow Z_c = A Z' A_t^*, \quad (14.29)$$

$$e' = C_t^* e \rightarrow I' = A_t^* I, \quad (14.30)$$

$$i = C i' \rightarrow E = A E'. \quad (14.31)$$

7. УРАВНЕНИЯ СВЯЗИ

I. Теперь предположим, что в предыдущей сети (см. рис. 14.3) три узловые пары коротко замкнуты, как показано на рис. 14.6, так что вместо шести имеется три узловые пары. Короткое замыкание узловых пар приводит к тому, что разности потенци-

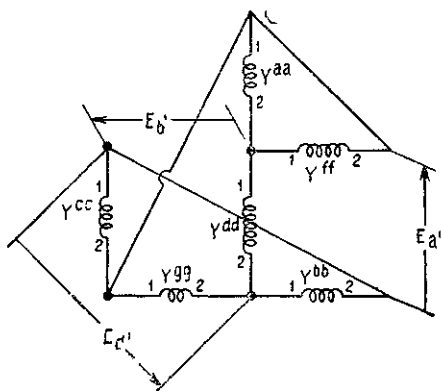


Рис. 14.6. Короткое замыкание трех узловых пар.

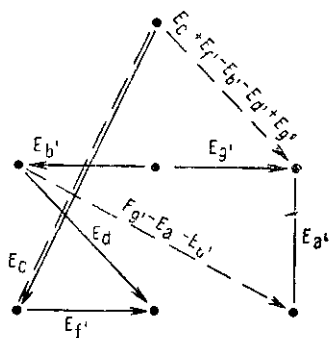


Рис. 14.7. Разности потенциалов перед коротким замыканием.

ала, возникающие на них, равны нулю. Это значит, что короткое замыкание трех узловых пар эквивалентно введению следующих трех уравнений связи, которые должны существовать между шестью новыми узловыми парами (рис. 14.7):

$$\begin{aligned} E_{c'} &= 0, \\ E_{c'} + E_{f'} - E_{b'} - E_{d'} + E_{g'} &= 0, \\ E_{g'} - E_{a'} - E_{b'} &= 0. \end{aligned} \quad (14.32)$$

При помощи трех уравнений связи три переменные, скажем $E_{c'}$, $E_{g'}$ и $E_{f'}$, можно исключить

$$\begin{aligned} E_{c'} &= 0, \\ E_{g'} &= E_{a'} + E_{b'}, \\ E_{f'} &= E_{d'} - E_{a'}, \end{aligned} \quad (14.33)$$

сохраняя в качестве новых переменных $E_{a'}$, $E_{b'}$, $E_{d'}$.

При подстановке этих уравнений в уравнение преобразования (14.6) соотношение между старыми и новыми переменными становится

$$\begin{aligned} E_a &= -E_{a'} - E_{b'} \\ E_b &= \phantom{-E_{a'}} - E_{d'} \\ E_c &= E_{a'} \\ E_d &= \phantom{-E_{a'}} E_{b'} + E_{d'} \\ E_f &= E_{a'} + E_{b'} \\ E_g &= -E_{a'} \phantom{+ E_{b'}} + E_{d'} \end{aligned} \quad C_t^{-1} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a' & b' & d' \\ a & -1 & -1 & \\ d & & & -1 \\ c & 1 & & \\ d & & 1 & 1 \\ f & 1 & 1 & \\ g & -1 & & 1 \end{array} \end{array} \quad (14.34)$$

Коэффициенты при новых переменных дают сингулярный обратный тензор преобразования, имеющий столько столбцов, сколько новых переменных, а именно — три.

Метод анализа с этого момента точно такой же, как и в случае несингулярного (квадратного) обратного тензора преобразования. Однако новый тензор адмиттанса Y' будет иметь три строки и три столбца вместо шести и т. п.

II. Новые компоненты тензора адмиттанса находят по компонентам тензора примитивной сети (уравнение (14.5)) из соотношения $C^{-1}Y C_t^{-1}$:

$$Y' = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a' & b' & d' \\ a' & \begin{array}{c} Y^{aa} + Y^{cc} - Y^{cg} + Y^{ff} \\ -Y^{gc} + Y^{gg} \end{array} & Y^{aa} + Y^{ff} & Y^{cg} - Y^{gg} \\ b' & Y^{aa} + Y^{ff} & Y^{aa} + Y^{dd} + Y^{ff} & -Y^{db} + Y^{dd} \\ d' & Y^{gc} - Y^{gg} & -Y^{bd} + Y^{dd} & Y^{bb} - Y^{bd} - Y^{db} \\ & & & Y^{dd} + Y^{gg} \end{array} \end{array} \quad (14.35)$$

Новые компоненты вектора токов, входящих и выходящих из узловых пар, равны $C^{-1}I$:

$$I' = \begin{bmatrix} a' & b' & d' \\ -I^a + I^c + I^f - I^g & -I^a + I^a + I^f & -I^b + I^d + I^g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I^{a'} & I^{b'} & I^{d'} \end{bmatrix}. \quad (14.36)$$

Уравнение тока новой сети есть $I' = Y'E'$ и т. д.

8. СИНГУЛЯРНЫЙ ТЕНЗОР ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

I. *Снова вместо того, чтобы для представления коротко замкнутых узловых пар выводить уравнение связи, можно с самого начала выбрать столько новых переменных, сколько имеется узловых пар, и следовать анализу § 4, как если бы обратный тензор преобразования C_i^{-1} был несингулярным.*

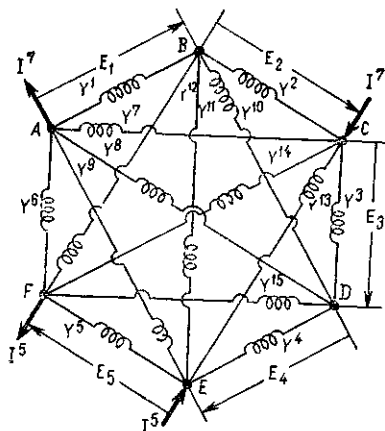


Рис. 14.8 Узловая сеть.

Следует помнить, что число узловых пар любой сети равно числу катушек минус число замкнутых контуров.

Подобным образом любая формула, полученная через C^{-1} , справедлива как для сингулярного, так и для несингулярного C^{-1} . Однако не следует использовать формулы, в которых присутствует сингулярный, обратный C^{-1} .

II. В качестве примера пусть 15 катушек соединены в сеть (см. рис. 14.8), имеющую пять узловых пар и десять контуров. В предположении, что в последовательном соединении с катушками нет приложенного напряжения, сеть является первоначально узловой сетью, поскольку она имеет гораздо меньше узловых пар, чем контуров.

Предположим, что к сети приложены два тока. Первый, I^7 , входит в сеть через узел A и выходит через узел C.

Второй ток, I^5 , поступает в сеть через узел E и покидает ее через узел F . Другими словами, предположим, что два узла катушки Y^5 являются, скажем, входными клеммами, а два узла катушки Y^7 — выходными клеммами сети. Вопрос заключается в том, какие разности потенциалов возникают на входных и выходных клеммах.

III. Этапы вывода уравнения тока следующие:

- 1) примитивная сеть состоит из 15 разомкнутых катушек;
- 2) тензор адмиттанса примитивной сети есть

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 1 | Y^1 | | | | | | | | | | | | | | |
| 2 | | Y^2 | | | | | | | | | | | | | |
| 3 | | | Y^3 | | | | | | | | | | | | |
| 4 | | | | Y^4 | | | Y^7 | | | | | | | | |
| 5 | | | | | Y^5 | | | | Y^9 | | | | | | |
| 6 | | | | | | Y^6 | | | | | | | | | |
| 7 | | | | Y^7 | | | Y^7 | | | | | | | | |
| 8 | | | | | | | | Y^8 | | | | | | | |
| 9 | | | | | Y^9 | | | | Y^9 | | | | | | |
| 10 | | | | | | | | | | Y^{10} | | | | | |
| 11 | | | | | | | | | | | Y^{11} | | | | |
| 12 | | | | | | | | | | | | Y^{12} | | | |
| 13 | | | | | | | | | | | | | Y^{13} | | |
| 14 | | | | | | | | | | | | | | Y^{14} | |
| 15 | | | | | | | | | | | | | | | Y^{15} |

(14.37)

сюда входят асимметричные собственные и взаимные адмиттансы, скажем, между Y^4 и Y^7 и между Y^5 и Y^9 . Этот тензор несимметричный;

- 3) вектор тока, приложенного к примитивной сети, есть $I =$

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|-----|---|---|---|---|-------|---|--------|---|---|----|----|----|----|----|----|
| $=$ | | | | | I^5 | | $-I^7$ | | | | | | | | |

(14.38)

IV. Для установления тензора преобразования делаются следующие шаги:

1) на рис. 14.9 показаны выбранные пять узловых пар;

2) на рис. 14.9 показаны также разности потенциалов, возникающие на каждой катушке;

3) приравнявая старые и новые разности потенциалов, возникающие на каждой катушке, можно записать следующие 15 уравнений (сравнивая рис. 14.8 и 14.9):

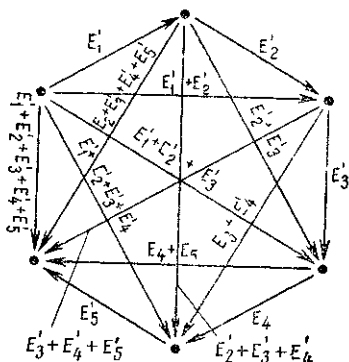


Рис. 14.9. Разности потенциалов на отдельных катушках.

$$E_1 = E_{1'}$$

$$E_2 = E_{2'}$$

$$E_3 = E_{3'}$$

$$E_4 = E_{4'}$$

$$E_5 = E_{5'}$$

$$E_6 = E_{1'} + E_{2'} + E_{3'} + E_{4'} + E_{5'}$$

$$E_7 = E_{1'} + E_{2'}$$

$$E_8 = E_{1'} + E_{2'} + E_{3'}$$

$$E_9 = E_{1'} + E_{2'} + E_{3'} + E_{4'}$$

$$E_{10} = E_{2'} + E_{3'}$$

$$E_{11} = E_{2'} + E_{3'} + E_{4'}$$

$$E_{12} = E_{2'} + E_{3'} + E_{4'} + E_{5'}$$

$$E_{13} = E_{3'} + E_{4'}$$

$$E_{14} = E_{3'} + E_{4'} + E_{5'}$$

$$E_{15} = E_{4'} + E_{5'}$$

1' 2' 3' 4' 5'

| | | | | | |
|----|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | | | | |
| 2 | | 1 | | | |
| 3 | | | 1 | | |
| 4 | | | | 1 | |
| 5 | | | | | 1 |
| 6 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 7 | 1 | 1 | | | |
| 8 | 1 | 1 | 1 | | |
| 9 | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| 10 | | 1 | 1 | | |
| 11 | | 1 | 1 | 1 | |
| 12 | | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 13 | | | 1 | 1 | |
| 14 | | | 1 | 1 | 1 |
| 15 | | | | 1 | 1 |

$$C_i^{-1} = \text{matrix} ; (14.39)$$

4) коэффициенты перед новыми переменными дают транспонированный обратный тензор преобразования C_T^{-1} .

V. Следующий шаг состоит в том, чтобы найти уравнение тока.

1. Тензор адмиттанса находится по $C^{-1} \cdot Y \cdot C_T^{-1}$ или по $A_t \cdot Y \cdot A$ как

| | 1' | 2' | 3' | 4' | 5' |
|---------|---|--|--|--|--|
| 1' | $Y_1 + Y_6 + Y_7 + Y_8 + Y_9$ | $Y_6 + Y_7 + Y_8 + Y_9$ | $Y_6 + Y_8 + Y_9$ | $Y_6 + Y_7 + Y_8 + Y_9$ | $Y_6 + Y_9$ |
| 2' | $Y_6 + Y_7 + Y_8 + Y_9$ | $Y_2 + Y_6 + Y_7 + Y_8 + Y_9 + Y_{10} + Y_{11} + Y_{12}$ | $Y_6 + Y_8 + Y_9 + Y_{10} + Y_{11} + Y_{12}$ | $Y_6 + Y_7 + Y_8 + Y_9 + Y_{11} + Y_{12}$ | $Y_6 + Y_9$ |
| Y' = 3' | $Y_6 + Y_8 + Y_9$ | $Y_4 + Y_6 + Y_7 + Y_8 + Y_9 + Y_{11} + Y_{12}$ | $Y_6 + Y_9 + Y_{11} + Y_{12} + Y_{13} + Y_{14} + Y_{15}$ | $Y_6 + Y_9 + Y_{11} + Y_{12} + Y_{13} + Y_{14}$ | $Y_6 + Y_9 + Y_{12} + Y_{14}$ |
| 4' | $Y_4 + Y_6 + Y_7 + Y_8 + Y_9 + Y_{11} + Y_{12}$ | $Y_4 + Y_6 + Y_7 + Y_8 + Y_9 + Y_{11} + Y_{12}$ | $Y_6 + Y_9 + Y_{11} + Y_{12} + Y_{13} + Y_{14}$ | $Y_4 + Y_6 + Y_7 + Y_8 + Y_9 + Y_{11} + Y_{12} + Y_{13} + Y_{14} + Y_{15}$ | $Y_6 + Y_9 + Y_{12} + Y_{14} + Y_{15}$ |
| 5' | $Y_5 + Y_6$ | $Y_5 + Y_6 + Y_{12}$ | $Y_5 + Y_6 + Y_{12} + Y_{14}$ | $Y_5 + Y_6 + Y_{12} + Y_{14} + Y_{15}$ | $Y_5 + Y_6 + Y_{12} + Y_{14} + Y_{15}$ |

(14.40)

2. Новые компоненты вектора приложенных токов, входящих и выходящих через узловые пары, согласно $C^{-1}I = A_t I$:

$$I' = \begin{bmatrix} 1' & 2' & 3' & 4' & 5' \\ -I_7 & -I_7 & & & I_5 \end{bmatrix}. \quad (14.41)$$

Ток, приложенный к катушке Y_7 , является частью двух приложенных к узловым парам токов I_1' и I_2' . Результирующий ток через узел B (принадлежащий обоим узловым парам) равен нулю.

3. Уравнение тока, представляющее собой пять уравнений с пятью переменными E' , есть $I' = Y'E'$.

VI. Если даны токи I' , протекающие в узловых парах, напряжения, которые следует приложить к узловым парам E' , чтобы произвести ток I' , находят по $E' = Y^{-1}I'$, т. е. вычислением обратного Y' .

В большинстве задач инвариантное уравнение $I' = Y'E'$ подразделяется на несколько инвариантных уравнений для дальнейших манипуляций.

9. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ УЗЛОВЫХ ПАР

I. Точно так же, как для контурных сетей (если уравнение поведения узловой сети было записано вдоль некоторых выбранных узловых пар), посредством нового тензора преобразования C_t^{-1} можно ввести новую систему узловых пар.

Необходимость введения новой системы переменных E'' возникает довольно часто. Когда сеть используется в нескольких

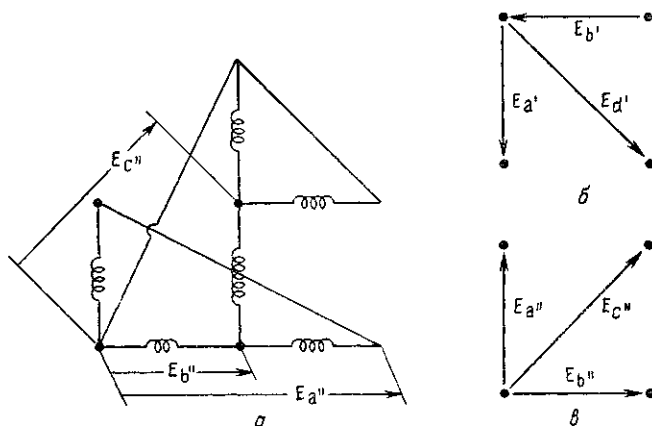


Рис. 14.10. Преобразование узловых пар:
а — заданная сеть; б — старые переменные; в — новые переменные.

различных типах задач, разные геометрические объекты, вычисленные для задач одного типа, можно использовать в некоторых других задачах, просто вводя новый тензор преобразования вместо того, чтобы каждый раз начинать все вновь с примитивной сети.

II. Рассмотрим пример такого преобразования (см. рис. 14.6). Предположим, что один из узлов является заземленным и разность потенциалов между землей и другими узлами будем рассматривать как переменные, т. е. три узловые пары $E_{a'}$, $E_{b'}$ и $E_{d'}$ (см. рис. 14.6) заменим другим набором трех узловых пар $E_{a''}$, $E_{b''}$ и $E_{c''}$ (рис. 14.10, а).

Поскольку несколько катушек соединены безадмиттансными ветвями, имеется только четыре узловые точки (см. рис. 14.10, б и в), между которыми можно предположить существование разности потенциалов. Из этих упрощенных диаграмм можно получить соотношение между старыми и новыми разностями потенциалов:

$$\begin{aligned}
 E_{a'} &= -E_{a''} \\
 E_{b'} &= E_{a''} - E_{c''} \\
 E_{d'} &= -E_{a''} + E_{b''}
 \end{aligned}
 \quad
 \begin{aligned}
 a' \\
 b' \\
 d'
 \end{aligned}
 C_t'^{-1} = \begin{bmatrix} a'' & b'' & c'' \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (14.42)$$

Коэффициенты при новых переменных дают $C_t'^{-1}$.

III. Если требуется тензор адмиттанса Y'' сети в этой второй системе координат, его можно найти по $C'^{-1}Y'C_t'^{-1}$, где Y' задан уравнением (14.33):

$$Y'' = \begin{array}{c} a'' \\ b'' \\ c'' \end{array} \begin{array}{|c|c|c|} \hline a'' & Y^{bb} + Y^{cc} & -Y^{cg} - Y^{bb} + Y^{bd} & -Y^{bd} \\ \hline b'' & -Y^{gc} - Y^{bb} + Y^{db} & Y^{bb} - Y^{bd} - Y^{db} + Y^{dd} + Y^{gg} & Y^{bd} - Y^{dd} \\ \hline c'' & -Y^{db} & Y^{db} - Y^{dd} & Y^{aa} + Y^{dd} + Y^{ff} \\ \hline \end{array} \quad (14.43)$$

IV. Новый вектор тока согласно $C'^{-1}I'$ равен

$$I'' = \begin{array}{c} a'' \\ b'' \\ c'' \end{array} \begin{bmatrix} I^b - I^c & -I^b + I^d + I^g & I^a - I^d - I^f \end{bmatrix}. \quad (14.44)$$

представляя собой токи, выходящие из разных узловых пар и входящие в общее заземление (рис. 14.11).

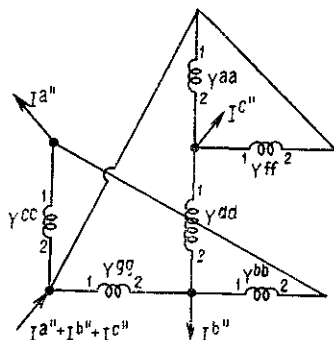


Рис. 14.11. Токи, примененные к узловым парам.

Если токи I'' , входящие в узлы, известны, разности потенциалов, возникающие между землей и другими узлами, находят по $E'' = Y''^{-1}I''$ вычислением «обращения» Y'' .

10. ЧИСЛОВОЙ ПРИМЕР

I. Пусть для числового примера адмиттансы будут чистыми проводимостями $Y^{aa}=2$, $Y^{bb}=5$, $Y^{cc}=6$, $Y^{dd}=7$, $Y^{ff}=8$, $Y^{gg}=9$ и три тока узловых пар

$$I'' = \begin{array}{|c|c|c|} \hline a'' & b'' & c'' \\ \hline 1 & 3 & 4 \\ \hline \end{array}. \quad (14.45)$$

Тогда при подстановке в уравнение (14.43) тензор адмиттанса Y'' и обратный ему будут

$$Y'' = \begin{array}{|c|c|c|} \hline a'' & b'' & c'' \\ \hline 11 & -5 & 0 \\ \hline -5 & 21 & -7 \\ \hline 0 & -7 & 17 \\ \hline \end{array}, \quad (14.46) \quad Y''^{-1} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline a'' & b'' & c'' \\ \hline 0,1094 & 0,02868 & 0,01181 \\ \hline 0,02868 & 0,06311 & 0,026 \\ \hline 0,01181 & 0,023 & 0,06952 \\ \hline \end{array}. \quad (14.47)$$

Разности потенциалов относительно земли согласно $Y''^{-1}I'' =$

$$E'' = \begin{array}{|c|c|c|} \hline a'' & b'' & c'' \\ \hline 0,23725 & 0,32137 & 0,35987 \\ \hline \end{array} \quad (14.48)$$

II. Разности потенциалов на отдельных катушках нельзя найти по $E' = C_t'^{-1}E''$, поскольку разность потенциалов на отдельных катушках есть E , а не E' . Однако E можно найти по $E = C_t^{-1}C_t'^{-1}E''$, поскольку $E = C_t^{-1}E'$, где C_t^{-1} дана в уравнении (14.34). Произведение двух тензоров преобразования уравнений (14.34) и (14.42) есть

$$C_t'^{-1} = C_t^{-1}C_t'^{-1} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline a'' & b'' & c'' \\ \hline a & 0 & 0 & 1 \\ \hline b & 1 & -1 & 0 \\ \hline c & -1 & 0 & 0 \\ \hline d & 0 & 1 & -1 \\ \hline f & 0 & 0 & -1 \\ \hline g & 0 & 1 & 0 \\ \hline \end{array} \quad (14.49)$$

и дает разности потенциалов на отдельных катушках по формуле $E = C_t^{-1} E''$

$$E = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline a & b & c & d & f & g \\ \hline 0,36787 & -0,08471 & -0,23725 & -0,04590 & -0,36787 & 0,32197 \\ \hline \end{array} \quad (14.50)$$

Токи I_c , протекающие в каждой отдельной катушке, определяются по формуле $I_c = YE = Y C_t^{-1} E''$

$$I_c = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline a & b & c & d & f & g \\ \hline 0,73574 & -0,42356 & -1,42356 & -0,321295 & -2,94296 & 2,89774 \\ \hline \end{array} \quad (14.51)$$

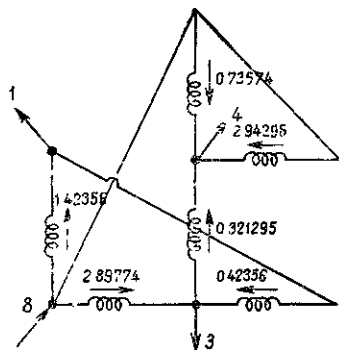


Рис. 14.12. Токи в отдельных катушках.

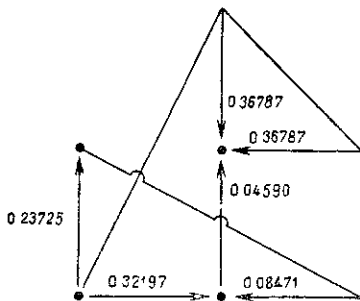


Рис. 14.13. Падение напряжения на отдельных катушках.

III. Правильность E и I_c можно проверить, проставляя на схеме около каждой катушки значения вновь найденных токов и разностей потенциалов (рис. 14.12 и 14.13). Эти значения удовлетворяют законам Кирхгофа.

11. ФИЗИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ОБРАТНОГО ТЕНЗОРА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

I. В гл. 6, § 17 было показано, что при соединении сети с другой сетью компоненты C приводят в соответствие контуры двух сетей. Подобным образом обратный тензор преобразования C_t^{-1} (содержащий только целые числа) приводит в соответствие узловые пары двух сетей.

В частности:

- 1) столбцы C_t^{-1} перечисляют старые узловые пары, узлы которых образуют новые узловые пары;
- 2) строки C_t^{-1} перечисляют новые узловые пары, из узлов которых строятся старые узловые пары.

II. Когда старая сеть является примитивной, то:

- 1) столбцы C_t^{-1} перечисляют катушки, два узла которых образуют новые узловые пары;
- 2) строки C_t^{-1} перечисляют новые узловые пары, которым принадлежат узлы каждой катушки.

Эти физические интерпретации играют важную роль в синтезе сетей, где C_t^{-1} задан и необходимо получить саму сеть.

III. При рассмотрении электромагнитных величин:

- 1) столбцы C_t^{-1} перечисляют старые узловые пары, токи которых I добавляются, чтобы образовать новые токи узловых пар I' ;

- 2) строки C_t^{-1} перечисляют новые узловые пары, напряжения которых E' образуют напряжение E старых узловых пар.

IV. Когда старая сеть примитивная, то:

- 1) столбцы C_t^{-1} перечисляют катушки, токи которых I образуют токи новых узловых пар I' ;

- 2) строки C_t^{-1} перечисляют новые узловые пары, напряжения на которых E' добавляются к напряжению E на отдельных катушках.

Физическая интерпретация для каждой группы матриц преобразования разная.

Настоящая интерпретация применима только в группе G_t (гл. 11, § 6), представляющей взаимосоединение катушек и содержащей только целые числа.

Следует напомнить, что при получении тензоров преобразования C или C_t^{-1} , содержащих целые числа, используются только первый и второй законы Кирхгофа.

12. ВЗАМОСОЕДИНЕНИЕ СЕТЕЙ

I. Вместо того, чтобы соединить отдельные катушки в систему, можно взять несколько независимых узловых сетей и соединить их в одну результирующую сеть с помощью C_t^{-1} . И снова отдельные системы, подлежащие взаимосоединению, могут быть неподвижными или движущимися, электрическими, механическими, акустическими и другими системами. Взаимосоединение узловых сетей состоит из короткого замыкания узловых пар ($A-A'$) каждой сети с другой парой (рис. 14.14). При взаимосоединении две узловые пары заменяются одной.

Вместо того, чтобы взаимосоединить несколько независимых сетей, одну систему можно разделить на несколько составляющих систем разделением узловых пар и каждую компоненту сети можно проана-

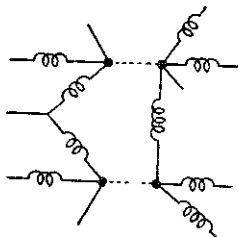


Рис. 14.14. Взаимосоединение узловых пар.

лизовать отдельно и затем соединить вновь в одну систему посредством C_t^{-1} .

II. При взаимосоединении целых систем выполняются те же этапы, что и при взаимосоединении отдельных катушек, а именно:

1. Находят I , Y и другие геометрические объекты примитивной системы, состоящей из отдельных систем.

Тензор адмиттанса примитивной системы есть

$$Y = Y_1 + Y_2 + Y_3 + \dots \quad (14.52)$$

Результирующий Y имеет столько осей, какова сумма осей составляющих координатных систем.

Вектор тока примитивной системы есть

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + \dots \quad (14.53)$$

2. Находят тензор преобразования $C_t^{-1} = C_\alpha^\alpha$, показывающий способ взаимосоединения составляющих систем.

3. Находят новые компоненты геометрических объектов результирующей системы

$$Y' = C^{-1}(Y_1 + Y_2 + Y_3 + \dots)C_t^{-1}, \quad (14.54)$$

$$I' = C^{-1}(I_1 + I_2 + I_3 + \dots). \quad (14.55)$$

Уравнение тока результирующей системы есть $I' = Y'E'$. Если оси некоторых составляющих систем Y_1 или Y_2 и других не содержат некоторые узловые пары, которые являются взаимосоединенными, то сначала вводят новое множество переменных, которое включает необходимые узловые пары.

13. ПРИМЕР СОЕДИНЕНИЯ ДВУХ СЕТЕЙ

I. Пусть две узловые сети (см. рис. 14.6 и 14.8) соединены, как показано на рис. 14.15.

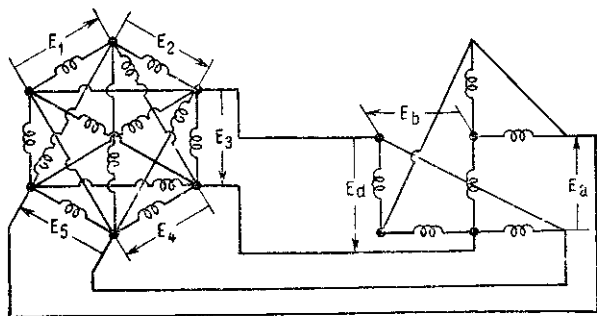


Рис. 14.15. Взаимосоединение узловых сетей.

Соединенные узловые пары следующие: от E_5 к E_a и от E_3 к E_d . Остальные узловые пары остаются несоединенными.

Тензоры адмиттанса составляющих систем задаются уравнениями (14.35) и (14.40). Их сумма $Y_1 + Y_2$ является адмиттанс-тензором примитивной системы (каждая компонента заменяется одним символом)

$$Y = \begin{array}{c} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ a \\ b \\ d \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} & Y_{14} & Y_{15} \\ \hline Y_{21} & Y_{22} & Y_{23} & Y_{24} & Y_{25} \\ \hline Y_{31} & Y_{32} & Y_{33} & Y_{34} & Y_{35} \\ \hline Y_{41} & Y_{42} & Y_{43} & Y_{44} & Y_{45} \\ \hline Y_{51} & Y_{52} & Y_{53} & Y_{54} & Y_{55} \\ \hline & & & & \\ \hline & & & & \\ \hline & & & & \\ \hline & & & & \\ \hline \gamma_{aa} & \gamma_{ab} & \gamma_{ad} \\ \hline \gamma_{ba} & \gamma_{bb} & \gamma_{bd} \\ \hline \gamma_{da} & \gamma_{db} & \gamma_{dd} \\ \hline \end{array} \end{array} \quad (14.56)$$

Вектор тока в примитивной системе

$$I = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline I^1 & I^2 & I^3 & I^4 & I^5 & I^a & I^b & I^d \\ \hline \end{array} \quad (14.57)$$

II. Тензор преобразования можно получить, если учесть, что соединение двух сетей состоит из: 1) замены E_5 и E_a одной узловой парой, скажем E_m , и замены E_3 и E_d одной узловой парой, скажем E_n ; 3) неизменности других узловых пар обеих сетей.

Устанавливая соотношение между старыми и новыми узловыми парами, получаем

| | | | | | | | | | |
|------------------------|--|--|----|----|----|----|----|----|---------|
| | | | 1' | 2' | 4' | b' | m' | n' | |
| $E_1 = E'_1$ | | | 1 | 1 | | | | | |
| $E_2 = E'_2$ | | | 2 | | 1 | | | | |
| $E_3 = E'_{n'}$ | | | 3 | | | | | 1 | |
| $E_4 = E'_4 + E'_{b'}$ | | | 4 | | 1 | 1 | | | (14.58) |
| $E_5 = E'_{m'}$ | | | 5 | | | | 1 | | |
| $E_a = E'_{m'}$ | | | a | | | | 1 | | |
| $E_b = E'_{b'}$ | | | b | | | 1 | | | |
| $E_d = E'_{n'}$ | | | d | | | | | 1 | |
| | | | | | | | | | |

Коэффициенты новых переменных образуют C_t^{-1} .

III. Тензор адмиттанса результирующей системы находят по формуле $C^{-1}YC_t^{-1} = A_tYA$

| | | | | | | | | |
|--------|----|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------------------------|-----------------------------------|---------|
| | | 1' | 2' | 4' | b' | m' | n' | |
| $Y' =$ | 1' | Y ₁₁ | Y ₁₂ | Y ₁₄ | | Y ₁₅ | Y ₁₃ | (14.59) |
| | 2' | Y ₂₁ | Y ₂₂ | Y ₂₄ | | Y ₂₅ | Y ₂₃ | |
| | 4' | Y ₄₁ | Y ₄₂ | Y ₄₄ | | Y ₄₅ | Y ₄₃ | |
| | b' | | | | Y _{bb} | Y _{ba} | Y _{bd} | |
| | m' | Y ₅₁ | Y ₅₂ | Y ₅₄ | Y _{ab} | Y ₅₅ + Y _{aa} | Y ₅₃ + Y _{ad} | |
| | n' | Y ₃₁ | Y ₃₂ | Y ₃₄ | Y _{ab} | Y ₃₅ + Y _{da} | Y ₃₃ + Y _{dd} | |

Вектор тока $I' = C^{-1}I = A_tI$ равен

| | | | | | | | |
|--------|----------------|----------------|----------------|----------------|---------------------------------|---------------------------------|---------|
| | 1' | 2' | 4' | b' | m' | n' | |
| $I' =$ | I ₁ | I ₂ | I ₄ | I ^b | I ₅ + I ^a | I ₃ + I ^d | (14.60) |

IV. Если составляющие системы выражены вдоль осей, по которым происходит соединение (как в настоящем примере), то можно обойтись без установления C_t^{-1} , а результирующий Y' может быть найден как $Y_1 + Y_2$ при условии, что оси, по которым происходит взаимосвязь, обозначены одними и теми же фиксированными индексами как в Y_1 , так и в Y_2 .

14. ДВОЙСТВЕННЫЙ ВИД ФОРМУЛ РЕДУКЦИИ

I. Как и в контурных сетях, где одно тензорное уравнение $e=zi$ можно заменить системой n тензорных уравнений, в узловых сетях одно тензорное уравнение $I=YE$ можно заменить системой n тензорных уравнений:

$$\begin{aligned} I^1 &= Y^{11}E_1 + Y^{12}E_2 + Y^{13}E_3 + \dots + Y^{1n}E_n, \\ I^2 &= Y^{21}E_1 + Y^{22}E_2 + Y^{23}E_3 + \dots + Y^{2n}E_n, \\ I^3 &= Y^{31}E_1 + Y^{32}E_2 + Y^{33}E_3 + \dots + Y^{3n}E_n, \\ & \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ I^n &= Y^{n1}E_1 + Y^{n2}E_2 + Y^{n3}E_3 + \dots + Y^{nn}E_n. \end{aligned} \quad (14.61)$$

Преобразования этих уравнений обсуждались в гл. 9 и 10.

Все уравнения и теоремы, выведенные в гл. 10 для системы линейных уравнений $e=zi$, равно справедливы для системы линейных уравнений $I=YE$ при простой замене величин уравнений $e=zi$ на дуальные, а именно: e на I , i на E , z на Y и т. д.

II. Например, если через некоторые узловые пары не протекают токи, то соответствующие напряжения E_2 можно исключить из двух тензорных уравнений

$$I^1 = Y^1E_1 + Y^2E_2, \quad (14.62)$$

$$0 = Y^3E_1 + Y^4E_2$$

заменой коротко замкнутого собственного адмиттанса Y^1 первой группы узловых пар «собственным адмиттансом открытой цепи»:

$$Y^1' = Y^1 - Y^2(Y^4)^{-1}Y^3. \quad (14.63)$$

III. Если через вторую группу узловых пар протекают токи I^2 , наличие их все равно можно прогнозировать, заменив входящий в первую группу узловых пар ток I^1 на эквивалентный ток I^1' , где

$$I^1' = I^1 - Y^2(Y^4)^{-1}I^2. \quad (14.64)$$

Дополнительная часть этого тока $-Y^2 \cdot (Y^4)^{-1} \cdot I^2$ — ток *закороченной цепи*, протекающий в первой группе узловых пар под воздействием I_2 узловых пар второй группы. (Поскольку $(Y^4)^{-1}I^2$ — напряжения между узловыми парами второй группы и коротко замкнутыми узловыми парами первой группы, то Y^2 , умноженный на это напряжение, есть ток, индуцируемый в узловых парах первой группы.) Это уравнение является обобщением двой-

ственной формы теоремы Тевенина¹⁾. Разность потенциалов на исключенных узловых парах

$$E_2' = -(\mathbf{Y}^4)^{-1} \mathbf{Y}^3 E_1. \quad (14.65)$$

IV. Всякий раз, когда используются формулы редукции, чтобы из системы уравнений $\mathbf{I} = \mathbf{Y}\mathbf{E}$ исключить несколько ковариантных переменных E_n за один шаг, исключение переменных физически эквивалентно исключению нескольких узловых пар при помощи преобразований типа контур-звезда. Исключение возможно даже при наличии взаимных адмиттансов между всеми узловыми парами и наличии приложенных к исключаемым узловым парам токов.

V. Адмиттанс сети между любыми двумя (или более) точками можно найти, если предположить, что эти две точки — одна из узловых пар, затем получить $\mathbf{I} = \mathbf{Y}\mathbf{E}$ и, наконец, исключить все оси, кроме необходимых.

¹⁾ Теорема взаимности. (Прим. пер.)

ЦЕПИ С МНОГОЭЛЕКТРОДНЫМИ ЛАМПАМИ

1. НЕЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ

До сих пор при рассмотрении различных сетей предполагалось, что существует *линейная* зависимость величины «отклика» от величины «воздействия», т. е. уравнение *поведения* имеет вид $e=zi$ или $I=YE$, где коэффициент пропорциональности z или Y не является функцией от i или E .

Однако в общем случае соотношение между величинами воздействия и отклика является *нелинейным*. Например, оно может иметь вид $e=zi+wi^2$ для каждой катушки, так что линейное соотношение $e=zi$ для всей сети использовать нельзя и *уравнение поведения, рассматривавшееся ранее, следует обобщить*.

Если изменения электромагнитных величин в нелинейных системах достаточно малы, то соотношение между величинами воздействия и отклика (когда изменения малы) — линейное и уравнение поведения остается в силе. Такие случаи часто встречаются, например, в цепях на многоэлектродных лампах, когда они работают в усилительном или генераторном режиме, а напряжения и токи изменяются в небольших пределах.

2. ЭЛЕКТРОДНАЯ ЛАМПА

I. n -электродную лампу можно рассматривать как чисто-контурную или как чисто-узловую сеть. Соединенные с нею цепи могут быть контурными, узловыми или ортогональными. *В большинстве практических приложений лампы цепи содержат меньше узловых пар, чем контуров, поэтому детально здесь будет представлен только узловой метод анализа.*

II. Если рассматривать лампу как чисто-узловую сеть, то она имеет n узлов, считая каждый электрод за узел (рис. 15.1). Катод действует как общий узел, от которого ответвляются остальные электроды, так что каждая «катушка» чисто-узловой сети — это путь электронов между катодом и остальными электродами. Катод служит источником электронов.

Один из электродов служит анодом, а все остальные — сетками. Но с аналитической точки зрения нет никакого различия между анодом и сетками, все они рассматриваются как узлы. Ток

накала не фигурирует в сети, так как его значение в анализе не играет никакой роли. Катод рассматривается только как вывод в общей узловой точке.

III. Чисто-узловая сеть имеет $n-1$ узловую пару (число узлов минус число подсетей). Два узла каждого из $n-1$ путей электронов («катушек») будем рассматривать как узловую пару, так что I представляет собой мгновенное значение тока, протекающего от катода к различным электродам, а E — мгновенную разность потенциалов между различными электродами и катодом.

IV. Если к одной узловой паре (к электродам) приложено постоянное напряжение E_a , то во всех узловых парах возникают постоянные токи I^a, I^b, I^c, \dots . Когда E_a изменяется, токи I^a, I^b, I^c, \dots также изменяются, но непропорционально. Их изменение зависит от значений напряжений E_b, E_c, \dots на других электродах или на самой лампе. Зависимости типа $I^a = f^a(E_a)$, $I^b = f^b(E_b)$ и другие называются «статическими характеристиками» лампы.

Для каждого электрода можно получить n таких зависимостей при каждом заданном значении тока катода и при каждом заданном значении постоянных напряжений на других электродах. Далее будем предполагать, что все эти зависимости $I = f(E)$ известны.

V. В дальнейшем в качестве примера n -электродной лампы будем рассматривать уравнения пятиэлектродной лампы (пентода).



Рис. 15.1.
а — пентод; б — эквивалентная узловая сеть.

3. УРАВНЕНИЕ ЛАМПЫ

I. Пусть к четырем узловым парам приложены четыре постоянных напряжения

$$E_u = \begin{bmatrix} a & b & c & p \\ E_a & E_b & E_c & E_p \end{bmatrix}. \quad (15.1)$$

Тогда через узловые пары будут протекать четыре постоянных тока

$$I^u = \begin{bmatrix} a & b & c & p \\ I^a & I^b & I^c & I^p \end{bmatrix}. \quad (15.2)$$

Предположим теперь, что одно из напряжений на зажимах лампы, скажем E_a , изменяется на малую величину от E_a до $E_a + \Delta E_a$. Тогда все четыре тока также изменятся. Один из токов, например I^a изменится от I^a до $I^a + \Delta I^a$. Если пренебречь

кривизной кривой $I^a=f(E_a)$ в окрестности данных значений E_a и I^a , то ΔI^a по данному ΔE_a можно найти по формуле

$$\Delta I^a = \frac{\partial I^a}{\partial E_a} \Delta E_a, \quad (15.3)$$

где $\partial I^a/\partial E_a$ — наклон кривой $I^a=f(E_a)$ при данных значениях I^a и E_a . Этот наклон предполагается известным (рис. 15.2).

Аналогично при изменении E_a остальные токи изменяются в соответствии с величинами наклона кривых в зависимости от ΔE_a и наклона частной кривой $I^a=f(E_a)$. Величины этих изменений:

$$\Delta I^b = \frac{\partial I^b}{\partial E_a} \Delta E_a, \quad \Delta I^c = \frac{\partial I^c}{\partial E_a} \Delta E_a, \quad \Delta I^p = \frac{\partial I^p}{\partial E_a} \Delta E_a.$$

II. Если изменяются все четыре напряжения, то изменение I^a равно

$$\Delta I^a = \frac{\partial I^a}{\partial E_a} \Delta E_a + \frac{\partial I^a}{\partial E_b} \Delta E_b + \frac{\partial I^a}{\partial E_c} \Delta E_c + \frac{\partial I^a}{\partial E_p} \Delta E_p,$$

поскольку каждое малое ΔE вызывает соответствующее изменение ΔI , которое не зависит от других малых изменений напряжения.

III. Аналогичные уравнения характерны для остальных токов, так что можно записать следующие четыре уравнения, показывающие изменения токов в зависимости от изменения напряжения:

$$\begin{aligned} \Delta I^a &= \frac{\partial I^a}{\partial E_a} \Delta E_a + \frac{\partial I^a}{\partial E_b} \Delta E_b + \frac{\partial I^a}{\partial E_c} \Delta E_c + \frac{\partial I^a}{\partial E_p} \Delta E_p, \\ \Delta I^b &= \frac{\partial I^b}{\partial E_a} \Delta E_a + \frac{\partial I^b}{\partial E_b} \Delta E_b + \frac{\partial I^b}{\partial E_c} \Delta E_c + \frac{\partial I^b}{\partial E_p} \Delta E_p, \end{aligned} \quad (15.4)$$

$$\Delta I^c = \frac{\partial I^c}{\partial E_a} \Delta E_a + \frac{\partial I^c}{\partial E_b} \Delta E_b + \frac{\partial I^c}{\partial E_c} \Delta E_c + \frac{\partial I^c}{\partial E_p} \Delta E_p,$$

$$\Delta I^p = \frac{\partial I^p}{\partial E_a} \Delta E_a + \frac{\partial I^p}{\partial E_b} \Delta E_b + \frac{\partial I^p}{\partial E_c} \Delta E_c + \frac{\partial I^p}{\partial E_p} \Delta E_p.$$

4. «БАЗОВЫЕ» И «ПРОИЗВОДНЫЕ» ТЕНЗОРЫ

I. Появление производных в приведенных выше фундаментальных уравнениях лампы требует более подробного обсуждения дифференцирования геометрических объектов.

Все рассмотренные ранее геометрические объекты e, i, z и I, E, Y были введены *по определению*. Это значит, что они не были *произведены* из других геометрических объектов, но, на-

оборот, сами образуют минимальное число базовых геометрических объектов, необходимых для определения электромагнитных явлений, возникающих в линейных сетях.

Когда определили минимальное количество базовых геометрических объектов в физических системах, используя различные приемы, можно получить множество других геометрических объектов, называемых «производными геометрическими объектами». Одной из целей тензорного анализа является нахождение формальных процедур, с помощью которых можно получить «производные тензоры», пользуясь данными «базовыми тензорами».

II. Для физических систем, матрицы преобразования C которых содержат только константы, одним из путей нахождения новых тензоров является дифференцирование различных базовых тензоров по переменным, если они являются функциями этих переменных.

Следует подчеркнуть, что если компоненты тензора преобразования C не являются константами, то метод обычного дифференцирования не дает новых тензоров.

(В таких случаях тензорный анализ предусматривает новый вид дифференцирования, называемый «абсолютным дифференцированием», или «ковариантным дифференцированием», который приводит к образованию новых производных тензоров из заданных базовых тензоров. Поскольку в этой книге все тензоры преобразования C имеют постоянные компоненты, нет нужды вводить абсолютное дифференцирование.)

Базовыми тензорами, которые были введены в линейных ламповых сетях, являются E и I (в уравнениях (15.1) и (15.2)), где $E = E_u$ — ковариантная переменная. Поскольку I является функцией E , новые тензоры можно получить последовательным дифференцированием I по E .

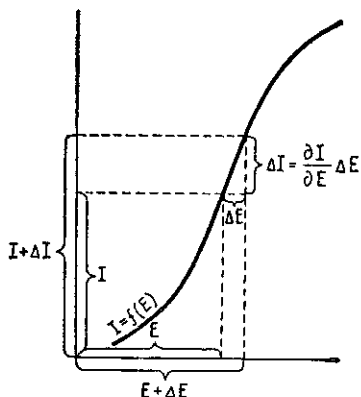


Рис. 15.2. Кривая статической характеристики.

5. КОНСТРУИРОВАНИЕ НОВЫХ ТЕНЗОРОВ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕМ

Повторяя сказанное в гл. 1, § 17, можно сформулировать следующие положения:

1. Производную от n -тензора по вектору находят дифференцированием каждой его компоненты по каждой компоненте вектора.

Например, если 2-тензор имеет n^2 компонент и каждая из них по очереди дифференцируется по каждой из n компонент векто-

ра (предполагается, что вектор имеет n компонент), то получаем тензор с n^3 компонентами.

2. Если тензор валентности n дифференцируется по вектору, то валентность результата равна $n+1$.

3. Если вектор, по которому дифференцируется тензор, является ковариантным, т. е. имеет нижний индекс, то результирующий объект ¹⁾ будет иметь один дополнительный контравариантный (верхний) индекс и наоборот. Например,

$$\partial Y^{uv} / \partial E_w = M^{uvw}. \quad (15.5)$$

Это положение можно доказать так. Продифференцируем вектор E_u по I^v . Если u, v, w являются индексами старых осей, а индексы u', v', w' представляют новые оси, то

$$\frac{\partial E_u}{\partial I^v} = \frac{\partial E_u}{\partial I^{v'}} \frac{\partial I^{v'}}{\partial I^v}.$$

Однако по (6.12)

$$\partial I^{v'} / \partial I^v = C_v^{v'}, \quad (15.6)$$

откуда

$$\frac{\partial E_u}{\partial I^v} = \frac{\partial E_u}{\partial I^{v'}} C_v^{v'} = Z_{uv'} C_v^{v'} = Z_{uv}. \quad (15.7)$$

Следовательно, новый тензор, полученный из E_u дифференцированием по I^v , имеет $1+1=2$ индекса. При этом одним ковариантным индексом является u (тот же индекс, что и у исходного вектора), а вторым (нижним) является v .

Дополнительно можно сформулировать также следующее положение.

4. Если тензор дифференцируется по вектору, то результат в общем случае не является тензором.

Продифференцируем, например, тензор E_u . То, что E_u — тензор, выражается его формулой преобразования:

$$E_u = E_{u'} C_u^{u'}. \quad (15.8)$$

Дифференцируем обе части этого равенства по I^v :

$$\frac{\partial E_u}{\partial I^v} = \frac{\partial E_{u'}}{\partial I^v} C_u^{u'} + E_{u'} \frac{\partial C_u^{u'}}{\partial I^v}, \quad (15.9)$$

поскольку произведение геометрических объектов дифференцируется посредством дифференцирования каждого геометрического объекта в отдельности.

$$\frac{\partial E_u}{\partial I^v} = \frac{\partial E_{u'}}{\partial I^{v'}} \frac{\partial I^{v'}}{\partial I^v} C_u^{u'} + E_{u'} \frac{\partial C_u^{u'}}{\partial I^v}.$$

¹⁾ Вообще говоря, не являющийся тензором (см. ниже). (Прим. пер.).

Используя (15.6), получаем

$$\frac{\partial E_u}{\partial I^v} = \frac{\partial E_{u'}}{\partial I^{v'}} C_{v'}^{v'} C_u^{u'} + E_{u'} \frac{\partial C_u^{u'}}{\partial I^v}$$

и из (15.7)

$$Z_{uv} = Z_{u'v'} C_{v'}^{v'} C_u^{u'} + E_{u'} \frac{\partial C_u^{u'}}{\partial I^v}. \quad (15.10)$$

Следовательно, формула преобразования $\partial E_u / \partial I^v = Z_{uv}$ отлична от формулы преобразования тензора валентности два, так как она содержит дополнительный член.

Для дальнейшего сформулируем следующие правила.

5. Если преобразования линейны, т. е. тензор преобразования имеет постоянные компоненты, производные от всех тензоров являются тензорами, поскольку все дополнительные члены в их формулах преобразования содержат $\partial C_u^{u'} / \partial I^v$, которые обращаются в нуль.

Последние два положения справедливы не только для производных тензора, но и для дифференциалов тензора. Например, дифференциал вектора (1-тензора) (гл. 7, § 10, I), вообще говоря, не является тензором, так что

$$\Delta I^u = \Delta I^{u'} C_{u'}^u + \frac{\partial C_{u'}^u}{\partial I^{v'}} I^{u'} \Delta I^{v'}. \quad (15.11)$$

Поскольку в данном случае последний член исчезает, так как $\partial C_{u'}^u / \partial I^{v'} = 0$, то ΔI^u преобразуется здесь как контравариантный тензор валентности один.

6. ТЕНЗОР АДМИТТАНСА

I. Преобразования, которые будут рассмотрены, имеют только постоянные компоненты, благодаря чему различные ΔI в четырех линейных уравнениях (15.4) можно рассматривать как компоненты контравариантного вектора $\Delta \mathbf{I} = \Delta I^u$:

$$\Delta I^u = \begin{bmatrix} u & a & b & c & p \\ \Delta I^a & \Delta I^b & \Delta I^c & \Delta I^p \end{bmatrix}. \quad (15.12)$$

Различные ΔE можно рассматривать как компоненты ковариантного вектора $\Delta \mathbf{E} = \Delta E_u$, так что

$$\Delta E_u = \begin{bmatrix} u & a & b & c & p \\ \Delta E_a & \Delta E_b & \Delta E_c & \Delta E_p \end{bmatrix}. \quad (15.13)$$

Коэффициенты при E_u образуют дважды контравариантный тензор $\mathbf{Y} = Y^{uv}$, называемый «тензором адмиттанса», поскольку они являются производными от вектора I^u по вектору E_v :

$$Y^{uv} = \begin{array}{c|cccc} v & a & b & c & p \\ \hline u & a & \frac{\partial I^a}{\partial E_a} & \frac{\partial I^a}{\partial E_b} & \frac{\partial I^a}{\partial E_c} & \frac{\partial I^a}{\partial E_p} \\ & b & \frac{\partial I^b}{\partial E_a} & \frac{\partial I^b}{\partial E_b} & \frac{\partial I^b}{\partial E_c} & \frac{\partial I^b}{\partial E_p} \\ & c & \frac{\partial I^c}{\partial E_a} & \frac{\partial I^c}{\partial E_b} & \frac{\partial I^c}{\partial E_c} & \frac{\partial I^c}{\partial E_p} \\ & p & \frac{\partial I^p}{\partial E_a} & \frac{\partial I^p}{\partial E_b} & \frac{\partial I^p}{\partial E_c} & \frac{\partial I^p}{\partial E_p} \end{array}, \quad (15.14)$$

и теперь уравнение (15.4) можно записать в индексных обозначениях

$$\Delta I^u = Y^{uv} \Delta E_v. \quad (15.15)$$

II. Y^{uv} можно записать в виде

$$Y^{uv} = \partial I^u / \partial E_v, \quad (15.16)$$

так что уравнение (15.15) принимает вид

$$\Delta I^u = \frac{\partial I^u}{\partial E_v} \Delta E_v. \quad (15.17)$$

Это тензорное уравнение представляет собой n линейных уравнений (15.4) с n переменными и по своей форме подобно простому уравнению (15.3) с одной неизвестной.

III. Каждый член тензора адмиттанса представляет крутизну кривой $I = f(E)$ в заданной точке и является действительным числом (не комплексным). Эти константы называются собственными и взаимными проводимостями различных катушек (отражением (reflex) и крутизной характеристик (transconductances) соответственно) и обозначаются G^{mn} . Тензор адмиттанса записывается через проводимости (кондуктансы) как

$$Y^{uv} = \begin{array}{c|cccc} v & a & b & c & p \\ \hline u & a & G^{aa} & G^{ab} & G^{ac} & G^{ap} \\ & b & G^{ba} & G^{bb} & G^{bc} & G^{bp} \\ & c & G^{ca} & G^{cb} & G^{cc} & G^{cp} \\ & p & G^{pa} & G^{pb} & G^{pc} & G^{pp} \end{array}. \quad (15.18)$$

Многие компоненты могут, разумеется, иметь нулевые значения.

IV. Удобно определить величину, обратную собственной проводимости, как сопротивление, т. е. $G^{mm} = 1/r_{mm}$. Отношение взаимной проводимости к собственной определяется как коэффициент усиления

$$\mu_a^b = \frac{G^{ab}}{G^{aa}} = \frac{\partial I^a / \partial E_b}{\partial I^a / \partial E_a} = - \frac{dE_a}{dE_b} \quad (15.19)$$

и

$$\mu_b^a = \frac{G^{ba}}{G^{bb}} = - \frac{dE_b}{dE_a}, \quad (15.20)$$

так что

$$G^{ba} = \mu_b^a / r_{bb}. \quad (15.21)$$

Следовательно, в терминах коэффициентов усиления и сопротивления тензор адмиттанса пентода есть

$$y^{uv} = \begin{array}{c|cccc} v & a & b & c & p \\ \hline u & a & 1/r_{aa} & \mu_a^b/r_{ab} & \mu_a^c/r_{aa} & \mu_a^p/r_{aa} \\ & b & \mu_b^a/r_{bb} & 1/r_{bb} & \mu_b^c/r_{bb} & \mu_b^p/r_{bb} \\ & c & \mu_c^a/r_{cc} & \mu_c^b/r_{cc} & 1/r_{cc} & \mu_c^p/r_{cc} \\ & p & \mu_p^a/r_{pp} & \mu_p^b/r_{pp} & \mu_p^c/r_{pp} & 1/r_{pp} \end{array}. \quad (15.22)$$

Тензор адмиттанса тетрада можно получить, опустив одну строку и столбец. В общепринятых обозначениях

$$y^{uv} = \begin{array}{c|ccc} v & a & b & p \\ \hline u & a & 1/r_a & \eta_a/r_a & \nu_a/r_a \\ & b & \eta_b/r_b & 1/r_b & \nu_b/r_b \\ & p & \nu_p/r_p & \nu_b/r_p & 1/r_p \end{array} = \begin{array}{c|ccc} v & a & b & p \\ \hline u & a & G^{aa} & G^{ab} & G^{ap} \\ & b & G^{ba} & G^{bb} & G^{bp} \\ & p & G^{pa} & G^{pb} & G^{pp} \end{array}, \quad (15.23)$$

где μ — анодный коэффициент усиления; ν — коэффициент усиления по сетке; η — коэффициент взаимного усиления. Тензор адмиттанса триада можно получить, опустив строки и столбцы b и c :

$$y^{uv} = \begin{array}{c|cc} v & g & p \\ \hline u & g & 1/r_g & \mu_g/r_g \\ & p & \mu_p/r_p & 1/r_p \end{array} = \begin{array}{c|cc} v & g & p \\ \hline u & g & G^{gg} & G^{gp} \\ & p & G^{pg} & G^{pp} \end{array}. \quad (15.24)$$

Если многоэлектродная лампа работает в режиме усиления или генерации, она, как правило, рассматривается как триод. Дополнительным сеткам как бы отводится роль регуляторов проводимости триода до нужных значений.

V. Если сеточный ток триода равен нулю, т. е. r_g — бесконечная величина, то тензор адмиттанса такого триода

$$Y^{uv} = \begin{array}{c|cc} v & g & p \\ \hline u & g & 0 \\ \hline p & \mu_p/r_p & 1/r_p \end{array} = \begin{array}{c|cc} v & g & p \\ \hline u & g & 0 \\ \hline p & G^p g & G^p p \end{array}. \quad (15.25)$$

Тензор адмиттанса *тетрода* в отсутствие сеточного тока имеет вид

$$Y^{uv} = \begin{array}{c|ccc} v & a & b & p \\ \hline u & a & 0 & 0 \\ \hline b & 0 & 0 & 0 \\ \hline p & \mu_a/r_p & \mu_b/r_p & 1/r_p \end{array} = \begin{array}{c|ccc} v & a & b & p \\ \hline u & a & 0 & 0 \\ \hline b & 0 & 0 & 0 \\ \hline p & G^p a & G^p b & G^p p \end{array}. \quad (15.26)$$

7. МНОГОЭЛЕКТРОДНЫЕ ЛАМПЫ И МНОГООБОМОТЧНЫЕ ТРАНСФОРМАТОРЫ

Так как тензор адмиттанса Y несимметричен, n -электродная лампа представляется $n-1$ катушкой с односторонней проводимостью (кондуктансом) между ними. Катушки соединяются в общем узле, соответствующем катоду (рис. 15.3, а).

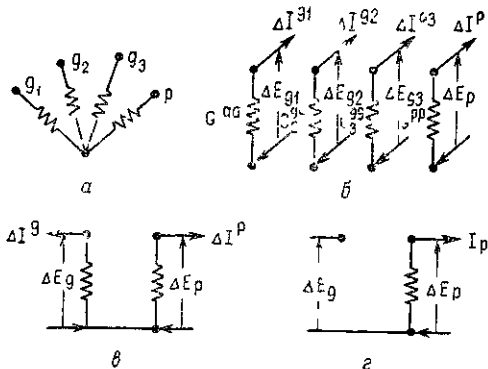


Рис. 15.3.
а — реальная лампа, б — примитивная сеть лампы,
в — триод, г — триод без сеточного тока.

На рис. 15.3, *в* показан триод с катушкой сетки, а на рис. 15.3, *г* — без катушки сетки. *Интересно заметить, что изолированная узловая пара образует часть сетки.*

Представление n -электродной лампы в виде узловой сети с $n-1$ катушками с взаимными проводимостями между ними подобно представлению n -обмоточного трансформатора в виде контурной сети с n катушками и взаимными индуктивностями. Однако имеются различия в аналитической форме их представления. Например:

1. В многообмоточном трансформаторе как тензор импеданса, так и тензор адмиттанса являются симметричными, т. е. столбцы и строки взаимозаменяемы. В лампе с нагретым катодом взаимные проводимости различны в различных направлениях. Другими словами, G^{ab} отличается от G^{ba} и влияние изменения анодного напряжения на сеточный ток отличается от влияния такого же изменения сеточного напряжения на анодный ток.

2. В трансформаторах, в условиях стационарного режима работы, каждый компонент тензора является или действительным, или комплексным числом. В лампах каждый компонент тензора является действительным числом, характеризующим проводимость. (Следует упомянуть, что в высокочастотных лампах, где приходится учитывать время пролета электронов в межэлектродном пространстве, действительные числа в тензоре адмиттанса также уступают место комплексным числам.)

3. В трансформаторах z - и y -тензоры одинаково применимы в широкой области изменения входных и выходных напряжений, в то время как в лампах и других нелинейных системах они применяются лишь в области малых изменений напряжений и токов.

8. ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ УЗЛОВЫЕ СЕТИ ДЛЯ ЛАМП

1. Уравнение тока для триода $\Delta I = Y \Delta E$, пользуясь (15.25), можно записать так:

$$\Delta I_g = \frac{1}{r_g} \Delta E_g + \frac{\mu_g}{r_g} \Delta E_p = G^{gg} \Delta E_g + G^{gp} \Delta E_p, \quad (15.27)$$

$$\Delta I_p = \frac{\mu_p}{r_p} \Delta E_g + \frac{1}{r_p} \Delta E_p = G^{pg} \Delta E_g + G^{pp} \Delta E_p.$$

Таким образом, мы видим, что сеточный ток протекает не только при появлении потенциала на сетке, но и при появлении анодного потенциала ΔE_p (и наоборот), так как между ними существуют взаимные проводимости.

II. Вместо представления сети и анода с помощью двух катушек с асимметричными взаимными адмиттансами μ_g/r_g и μ_p/r_p и собственными адмиттансами $1/r_g$ и $1/r_p$ стало обычным

представлять эти катушки без взаимных адмиттансов. Роль асимметричных взаимных адмиттансов выполняют два генератора тока, подающие на сетку ток $(\mu_g/r_g)\Delta E_p$ и на анод $(\mu_p/r_p)\Delta E_g$, как следует из уравнений и как показано на рис. 15.4, б.

В терминологии узловых сетей *однаправленные взаимные адмиттансы между двумя узловыми парами заменяются токами, воздействующими (impressed) на две узловые пары* (рис. 15.4, в). Конечно, одновременно к этим же узловым парам приложены также ΔE_g и ΔE_p соответственно.

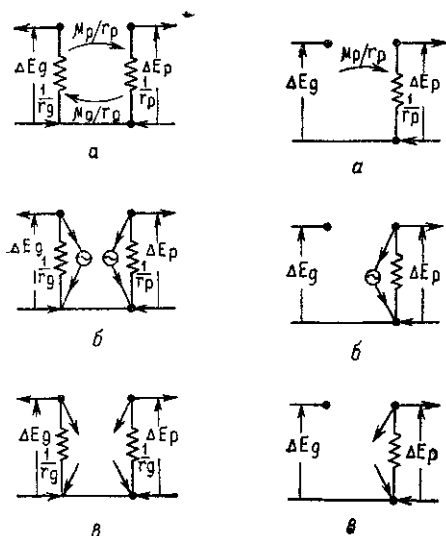


Рис. 15.4:
 а — триод с сеточным током; б — взаимные проводимости как генераторы тока; в — взаимная проводимость как приложенный ток.

Рис. 15.5:
 а — триод без сеточного тока; б — взаимные проводимости как генераторы тока; в — взаимная проводимость как приложенный ток.

В *n*-электродной лампе взаимные адмиттансы между *n* — 1 катушками (см. рис. 15.3, а) можно заменить на *n* — 2 различных множеств токов через каждую катушку.

III. Если сеточное сопротивление r_g бесконечно, то сеточный ток отсутствует, $\Delta I_g = 0$ и эквивалентная узловая сеть *триода* приобретает вид, показанный на рис. 15.5.

9. ВЗАИМОСОЕДИНЕНИЕ ЛАМП В СЕТИ

I. Если сеть в качестве элементов содержит лампы, то *каждую лампу можно представить двумя (или более) дополнительными катушками, имеющими какие-либо собственные и взаимные адмиттансы, по уравнениям (15.22) — (15.26)*. Это означает, что примитивная узловая сеть должна содержать все катушки внешней сети и по две (или более) катушки на каждую лампу. Тензор преобразования устанавливается точно так же, как это делалось для узловых сетей в предыдущих главах, и точно так же проводится весь анализ полной сети.

II. Иногда весьма удобно сначала разделить полную систему на две подсистемы: одну — содержащую только лампы, другую — представляющую неподвижную сеть, провести анализ отдельно и уже затем объединить их в исходную сеть по уравнению (14.59). Это значит, что если тензор адмиттанса лампы (или ламп) есть Y_2 ,

а статической сети (или сетей) Y_1 и две подсистемы взаимосоединяются с помощью $C_t^{-1} = A$, то тензор адмиттанса результирующей сети есть

$$Y' = A_t(Y_1 + Y_2)A. \quad (15.28)$$

Они взаимосоединяются при размещении узловых пар параллельно друг другу.

Неподвижную сеть можно разделить на части и затем объединить снова в единое целое. Например, обратную связь между сеткой и анодом можно проанализировать отдельно, поскольку анализ оставшейся части неподвижной сети обычно весьма прост. Аналогично ламповую сеть можно разделить на несколько частей в зависимости от способа их взаимодействия. В неподвижных сетях множество катушек можно заменить простой эквивалентной катушкой.

III. Так как каждая узловая пара лампы соединена с соответствующей узловой парой внешней сети, действие тензора преобразования C_t^{-1} сводится к простой замене осей лампы g_1 и p_2 и осей сети g и p на g и p . Это изменение эквивалентно простому суммированию тензоров Y_1 и Y_2 .

Значит, если узловые пары сети включают сеточную и анодную оси, то результирующий Y' находят как $Y_1 + Y_2$ без выполнения процесса преобразования. Другими словами, действие преобразования сводится к тому, что оси g и p утрачивают свои индексы.

IV. После того как результирующий Y' , а следовательно, и уравнение $I' = Y'E'$ получены, уравнение можно подвергнуть всем типам преобразований, некоторые из которых будут позднее показаны в гл. 21.

Во многих задачах приложенный ток I' известен лишь для одной узловой пары, а разность потенциалов E' необходимо найти для другой узловой пары. В таких случаях все ненужные строки и столбцы Y' следует исключить по формулам редукции (гл. 10) и оставить лишь два столбца и две строки по направлению входной и выходной осей. (Одновременное исключение одной строки и одного столбца эквивалентно обычному упрощению сети путем преобразования контур-звезда.)

В результате получим два уравнения

$$\begin{aligned} \Delta I^a &= Y^{aa} \Delta E_a + Y^{ab} \Delta E_b, \\ 0 &= Y^{ba} \Delta E_a + Y^{bb} \Delta E_b, \end{aligned} \quad (15.29)$$

где ΔI^a известно, а ΔE_b неизвестно.

Исключая ΔE_a из второго уравнения, получаем

$$\begin{aligned} \Delta E_a &= -(Y^{ba})^{-1} Y^{bb} \Delta E_b, \\ \Delta I^a &= [(Y^{ab} Y^{ba} - Y^{aa} Y^{bb}) / Y^{ba}] \Delta E_b. \end{aligned}$$

Следовательно, входное напряжение через входной ток запишем как

$$\Delta E_b = [Y^{ba}(Y^{ab}Y^{ba} - Y^{aa}Y^{bb})] \Delta I_a. \quad (15.30)$$

В других задачах требуется найти отношение выходного напряжения к входному. В этом случае из второго уравнения (15.29) имеем

$$\frac{\Delta E_b}{\Delta E_a} = - \frac{Y^{ba}}{Y^{bb}}. \quad (15.31)$$

10. УСИЛИТЕЛЬ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ ЧАСТОТЫ

I. Проанализируем сеть (рис. 15.6, а), представляющую собой один каскад усилителя промежуточной частоты приемника, в которой нужно определить эффект влияния сеточно-анодно-емкостной обратной связи Y^5 .

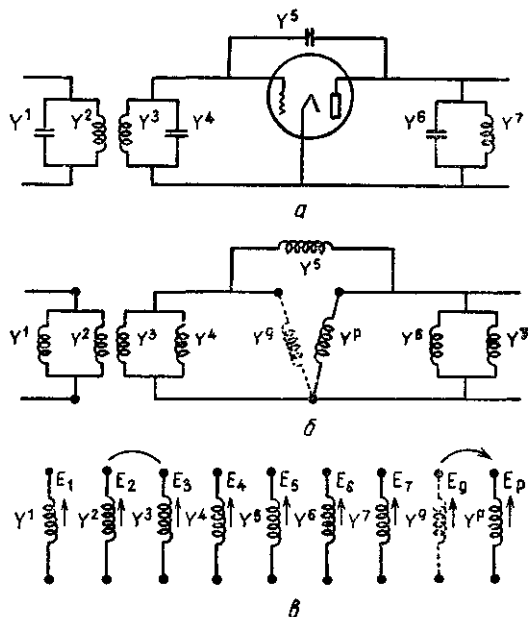


Рис. 15.6. Усилитель промежуточной частоты:

а — заданная сеть; б — катушки и узлы сети; в — соответствующая примитивная сеть.

Если лампу заменить двумя катушками, то получится результирующая узловая сеть из девяти катушек (рис. 15.6, б). В ней имеется пять узлов и две подсети, а также соответственно $5-2=3$ узловые пары и $9-3=6$ контуров. Следовательно, удобнее анализировать эту сеть как узловую.

II. Чтобы найти тензор адмиттанса Y примитивной сети, необходимо найти адмиттансы катушек. Однако обычно известны лишь их импедансы

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|-------|----------|----------|-------|-------|-------|-------|
| 1 | Z_1 | | | | | | |
| 2 | | Z_2 | Z_{23} | | | | |
| 3 | | Z_{23} | Z_3 | | | | |
| 4 | | | | Z_4 | | | |
| 5 | | | | | Z_5 | | |
| 6 | | | | | | Z_6 | |
| 7 | | | | | | | Z_7 |

Тензор адмиттанса можно найти, вычислив тензор, обратный Z , имеющий диагональную форму. Поэтому его можно рассматривать как диагональную компаунд-матрицу, в которой каждая составляющая матрица имеет единственную компоненту, кроме одной матрицы, имеющей четыре компоненты, представляющие трансформатор из катушек 2 и 3. Обратная диагональной компаунд-матрицы находится вычислением обратных матриц отдельно для каждой диагональной компаунд-компоненты (уравнение (10.46)). Следовательно, тензор адмиттанса внешней сети равен

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---------|-------------|-------------|---------|---------|---------|---------|
| 1 | $1/Z_1$ | | | | | | |
| 2 | | Z_3/D | $-Z_{23}/D$ | | | | |
| 3 | | $-Z_{23}/D$ | Z_2/D | | | | |
| 4 | | | | $1/Z_4$ | | | |
| 5 | | | | | $1/Z_5$ | | |
| 6 | | | | | | $1/Z_6$ | |
| 7 | | | | | | | $1/Z_7$ |

где $D = Z_2 Z_3 - (Z_{23})^2$.

Тензор адмиттанса примитивной сегги (рис. 15.6, в) имеет девять строк и столбцов:

$$Y = \begin{array}{c|cccccccc|cc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & g & p \\ \hline 1 & Y^1 & & & & & & & & \\ 2 & & Y^2 & Y^{23} & & & & & & \\ 3 & & Y^{23} & Y^3 & & & & & & \\ 4 & & & & Y^4 & & & & & \\ 5 & & & & & Y^5 & & & & \\ 6 & & & & & & Y^6 & & & \\ 7 & & & & & & & Y^7 & & \\ g & & & & & & & & & \\ p & & & & & & & & G^p g & G^p p \end{array} \quad (15.32)$$

Следует заметить, что согласно уравнению (15.25) нулевые компоненты содержит лишь строка g , но не столбец.

Вектор приложенных токов

$$\Delta I = \begin{array}{c|cccccccc|cc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & p & g \\ \hline \Delta I & & & & & & & & & \end{array}$$

III. Если предположить, что имеются три узловые пары, то они должны по возможности включать входные и выходные узлы, а также катушки катод — сетка — анод. Три выбранные узловые пары показаны на рис. 15.7, а; разности потенциалов на всех катушках показаны на рис. 15.7, б.

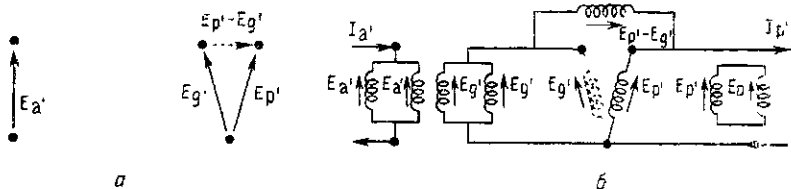


Рис. 15.7.

а — новые узловые пары; б — напряжения на отдельных катушках.

Тензор преобразования получается приравнованием старых и новых напряжений на каждой катушке (ΔE заменяется при этом на E):

| | | a' | g' | p' | |
|--------------------------|---|----|----|----|---------|
| $E_1 = E_{a'}$ | 1 | 1 | | | (15.33) |
| $E_2 = E_{a'}$ | 2 | 1 | | | |
| $E_3 = E_{g'}$ | 3 | | 1 | | |
| $E_4 = E_{g'}$ | 4 | | 1 | | |
| $E_5 = -E_{g'} + E_{p'}$ | 5 | | -1 | 1 | |
| $E_6 = E_{p'}$ | 6 | | | 1 | |
| $E_7 = E_{p'}$ | 7 | | | 1 | |
| $E_g = E_{g'}$ | g | | 1 | | |
| $E_p = E_{p'}$ | p | | | 1 | |

Коэффициенты при *новых* напряжениях дают обратный транспонированный тензор преобразования C_t^{-1} .

IV. Результирующий тензор адмиттанса сети находят из $A_t \cdot Y \cdot A$:

| | | a' | g' | p' | |
|---------|--|-------------|-------------------|----------------------------|---------|
| a' | | $Y_1 + Y_2$ | Y_{23} | 0 | (15.34) |
| Y' = g' | | Y_{23} | $Y_3 + Y_4 + Y_5$ | - Y_5 | |
| p' | | | - $Y_5 + G_{pg}$ | $Y_5 + Y_6 + Y_7 + G_{pp}$ | |

Вектор приложенных токов находят из $C^{-1}\Delta I = A_t \Delta I$:

$$\Delta I' = \begin{bmatrix} a' & g' & p' \\ \Delta I^a & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (15.35)$$

Разности потенциалов (ковариантные переменные) равны

$$\Delta E' = \begin{bmatrix} a' & g' & p' \\ \Delta E'_a & \Delta E'_g & \Delta E'_p \end{bmatrix}, \quad (15.36)$$

и уравнение токов принимает вид $\Delta I' = Y' \Delta E'$.

V. Если необходимо найти разность потенциалов на выходе $\Delta E_{p'}$, то оси g' несущественны и соответствующую строку и столбец можно исключить с помощью формулы редукции. Располагая ось g' в последней строке, имеем

| | a' | p' | g' | |
|---------|---------------------------------|--|--|---------|
| a' | Y ² + Y ² | 0 | Y ²³ | (15.37) |
| Y' = p' | 0 | Y ⁵ + Y ⁶ + Y ⁷ + G ^{pp} | - Y ⁵ + G ^{pg} | |
| g' | Y ²³ | - Y ⁵ | Y ³ + Y ⁴ + Y ⁵ | |

Исключим g' по формуле редукции адмиттанса:

$$Y^{1'} = Y^1 - Y^2 \cdot Y^{4-1} \cdot Y^3, \quad (15.38)$$

$$\begin{aligned}
 Y^{1'} &= Y^1 - \overrightarrow{\begin{array}{|c|} \hline Y^{23} \\ \hline -Y^5 + G^{pg} \\ \hline \end{array}} \cdot \begin{array}{|c|} \hline 1/(Y^3 + Y^4 + Y^5) \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline Y^{23} & -Y^5 \\ \hline \end{array} \downarrow \\
 &= Y^1 - \begin{array}{|c|c|} \hline \frac{Y^{23} Y^{23}}{Y^3 + Y^4 + Y^5} & - \frac{Y^{23} Y^5}{Y^3 + Y^4 + Y^5} \\ \hline \frac{(-Y^5 + G^{pg}) Y^{23}}{Y^3 + Y^4 + Y^5} & - \frac{(-Y^5 + G^{pg}) Y^5}{Y^3 + Y^4 + Y^5} \\ \hline \end{array}, \quad (15.39)
 \end{aligned}$$

| | a' | p' | |
|----|--|---|---|
| a' | Y ¹ + Y ² - $\frac{(Y^{23})^2}{Y^3 + Y^4 + Y^5}$ | $\frac{Y^{23} Y^5}{Y^3 + Y^4 + Y^5}$ | = |
| p' | $\frac{(Y^5 - G^{pg}) Y^{23}}{Y^3 + Y^4 + Y^5}$ | $\frac{Y^5 + Y^6 + Y^7 + G^{pp} + (G^{pg} - Y^5) Y^5}{Y^3 + Y^4 + Y^5}$ | |

| a' | p' |
|-----------------|-----------------|
| Y ^{aa} | Y ^{ap} |
| Y ^{pa} | Y ^{pp} |

Разность потенциалов ΔE_p^1 находят по формуле (15.30).

11. УСИЛИТЕЛЬ С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ

Рассмотрим сеть (рис. 15.8, а), которая состоит из 14 катушек и имеет 8 узлов, 3 подсети и, следовательно, 8—3=5 узловых пар и 14—5=9 контуров.

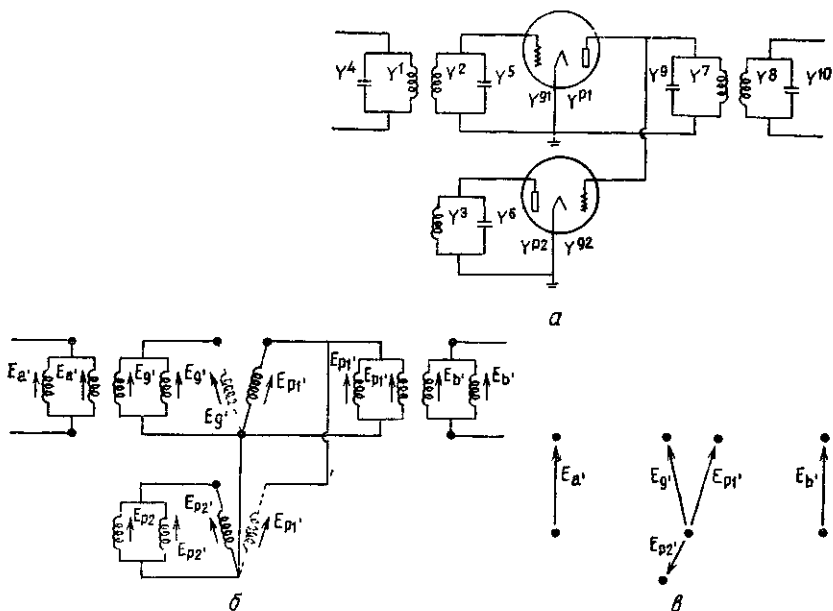


Рис. 15.8. Усилитель с обратной связью:
 а — заданная сеть; б — напряжение на отдельных катушках; в — выбранные узловые пары.

Тензор адмиттанса сети до соединения равен

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | g_1 | p_1 | g_2 | p_2 |
|-------|----------|----------|----------|-------|-------|-------|----------|----------|-------|----------|---------|---------|---------|---------|
| 1 | Y_1 | Y_{12} | Y_{13} | | | | | | | | | | | |
| 2 | Y_{12} | Y_2 | Y_{23} | | | | | | | | | | | |
| 3 | Y_{12} | Y_{23} | Y_3 | | | | | | | | | | | |
| 4 | | | | Y_4 | | | | | | | | | | |
| 5 | | | | | Y_5 | | | | | | | | | |
| 6 | | | | | | Y_6 | | | | | | | | |
| 7 | | | | | | | Y_7 | Y_{78} | | | | | | |
| 8 | | | | | | | Y_{78} | Y_8 | | | | | | |
| 9 | | | | | | | | | Y_9 | | | | | |
| 10 | | | | | | | | | | Y_{10} | | | | |
| g_1 | | | | | | | | | | | GPE_1 | GPP_1 | | |
| p_1 | | | | | | | | | | | | | GPE_2 | GPP_2 |
| g_2 | | | | | | | | | | | | | | |
| p_2 | | | | | | | | | | | | | | |

$$(15.40)$$

Чтобы найти Y для внешней сети при известном Z , необходимо вычислить обратную матрицу от двух- и трехмерных матриц, представляющих собой тензоры импеданса двух трансформаторов.

Разности потенциалов на катушках показаны на рис. 15.8, б, а выбранные напряжения пяти узловых пар — на рис. 15.8, в.

Приравняв старые и новые напряжения на каждой катушке, получаем тензор преобразования (ΔE заменены на E):

| | | | | | | |
|----------------------|------|------|--------|--------|-----|---------|
| | a' | g' | p_2' | p_1' | b | |
| $E_1 = E_{a'}$ | 1 | | | | | (15.41) |
| $E_2 = E_{g'}$ | | 1 | | | | |
| $E_3 = E_{p_2'}$ | | | 1 | | | |
| $E_4 = E_{a'}$ | 1 | | | | | |
| $E_5 = E_{g'}$ | | 1 | | | | |
| $E_6 = E_{p_2'}$ | | | 1 | | | |
| $E_7 = E_{p_1'}$ | | | | 1 | | |
| $E_8 = E_b$ | | | | | 1 | |
| $E_9 = E_{p_1'}$ | | | | 1 | | |
| $E_{10} = E_b$ | | | | | 1 | |
| $E_{g_1} = E_{g'}$ | | 1 | | | | |
| $E_{p_1} = E_{p_1'}$ | | | | 1 | | |
| $E_{g_2} = E_{p_1'}$ | | | | 1 | | |
| $E_{p_2} = E_{p_2'}$ | | | 1 | | | |

Тензор адмиттанса результирующей сети по $A_i Y A$ есть

| | | | | | |
|-------------|-------------|-------------|------------------------|------------------------|----------------|
| | a' | g' | p_2' | p_1' | b |
| a' | $Y_1 + Y_4$ | Y_{12} | Y_{13} | | |
| g' | Y_{12} | $Y_2 + Y_5$ | Y_{23} | | |
| $Y' = p_2'$ | Y_{13} | Y_{23} | $Y_3 + Y_6 + G^{pp_2}$ | G^{pg_2} | |
| p_1' | | G^{pg_1} | | $Y_7 + Y_9 + G^{pp_1}$ | Y_{78} |
| b | | | | Y_{78} | $Y_8 + Y_{10}$ |

(15.42)

Если ток $I^{a'}$ известен, а E_b необходимо определить, *исключают три строки и три столбца* (g', p_2', p_1') и получают уравнения, аналогичные (15.29).

12. ДВУХТАКТНЫЙ УСИЛИТЕЛЬ

В качестве иллюстрации раздельного анализа сети и лампы рассмотрим мощный радиочастотный усилитель (рис. 15.9, а), в котором внутренняя межсеточная емкостная связь скомпенсирована внешне приложенной емкостной связью.

Неподвижная компонента сети (рис. 15.9, б) имеет 14 катушек и семь узлов, а следовательно, шесть узловых пар и восемь контуров. Тензор адмиттанса до соединения имеет 14 строк и столбцов и содержит *лишь диагональные компоненты*.

Тензор преобразования этой сети (ΔE заменен на E) (по рис. 15.9, б, г) есть

| $E_1 =$ | E_{g1} | $-E_{g2}$ | | | | | | | | | | | | | |
|------------|-------------------------------|--------------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| $E_2 =$ | E_{g1} | $-E_{g2}$ | | | | | | | | | | | | | |
| $E_3 =$ | E_{g1} | | | | | | | | | | | | | | |
| $E_4 =$ | | E_{g2} | | | | | | | | | | | | | |
| $E_5 =$ | $-E_{g1} + E_{p1}$ | | | | | | | | | | | | | | |
| $E_6 =$ | | $E_{p1} - E_{g2}$ | | | | | | | | | | | | | |
| $E_7 =$ | | $-E_{g2} + E_{p2}$ | | | | | | | | | | | | | |
| $E_8 =$ | E_{g1} | $-E_{p2}$ | | | | | | | | | | | | | |
| $E_9 =$ | E_{p1} | | | | | | | | | | | | | | |
| $E_{10} =$ | | E_{p2} | | | | | | | | | | | | | |
| $E_{11} =$ | E_{p1} | $-E_{p2}$ | | | | | | | | | | | | | |
| $E_{12} =$ | | E_a | | | | | | | | | | | | | |
| $E_{13} =$ | $E_{p1} - E_{p2} + E_a + E_b$ | | | | | | | | | | | | | | |
| $E_{14} =$ | E_b | | | | | | | | | | | | | | |

$A =$

| | g_1 | p_1 | g_2 | p_2 | a | b |
|----|-------|-------|-------|-------|-----|-----|
| 1 | 1 | | -1 | | | |
| 2 | 1 | | -1 | | | |
| 3 | 1 | | | | | |
| 4 | | | 1 | | | |
| 5 | -1 | 1 | | | | |
| 6 | | 1 | -1 | | | |
| 7 | | | -1 | 1 | | |
| 8 | 1 | | | -1 | | |
| 9 | | 1 | | | | |
| 10 | | | | 1 | | |
| 11 | | 1 | -1 | | | |
| 12 | | | | | 1 | |
| 13 | | 1 | -1 | 1 | 1 | |
| 14 | | | | | | 1 |

(15.43)

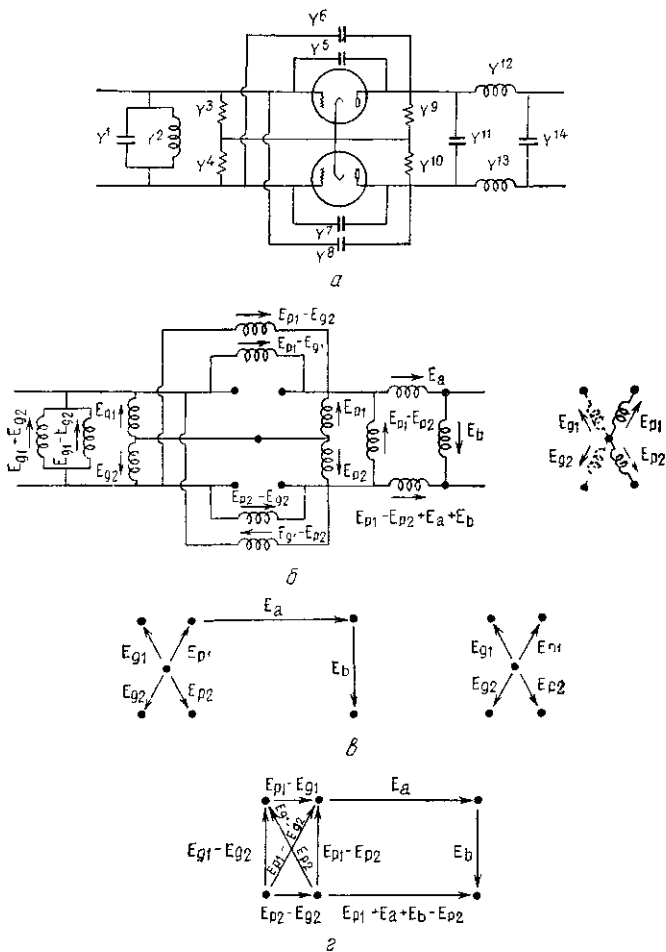


Рис. 15.9. Двухтактный усилитель:

a — заданная сеть; b — напряжения на отдельных катушках двух компонент сети; β — шланговые узловые пары; z — разности потенциалов.

Результирующий тензор адмиттанса получаем по $A_t Y_A$

| | g_1 | p_1 | g_2 | p_2 | a | b |
|-------------|-----------------------------|-----------------------------------|-----------------------------|--------------------------------------|-----------------|-----------------|
| g_1 | $Y_1+Y_2+Y_3$ $+Y_5+Y_8$ | $-Y_5$ | $-Y_1-Y_2$ | $-Y_8$ | 0 | 0 |
| p_1 | $-Y_5$ | $Y_5+Y_6+Y_9$ $+Y_{11}+Y_{13}$ | $-Y_6$ | $-Y_{11}-Y_{13}$ | Y_{13} | Y_{13} |
| $Y_1 = g_2$ | $-Y_1-Y_2$ | $-Y_6$ | $Y_1+Y_2+Y_4$ $+Y_6+Y_7$ | $-Y_7$ | 0 | 0 |
| p_2 | $-Y_8$ | $-Y_{11}-Y_{13}$ | $-Y_7$ | $Y_7+Y_8+Y_{10}$ $+Y_{11}+Y_{13}$ | $-Y_{13}$ | $-Y_{13}$ |
| a | 0 | Y_{13} | 0 | $-Y_{13}$ | $Y_{12}+Y_{13}$ | Y_{13} |
| b | 0 | Y_{13} | 0 | $-Y_{13}$ | Y_{13} | $Y_{13}+Y_{14}$ |

(15.44)

Тензор адмиттанса двух ламп на рис. 15.9, б есть

$$Y_2 = \begin{matrix} & g_1 & p_1 & g_2 & p_2 \\ p_1 & G^{pg1} & G^{pp1} & & \\ p_2 & & & G^{pg2} & G^{pp2} \end{matrix} \quad (15.45)$$

Следовательно, новые компоненты тензора адмиттанса результирующей сети $Y_1 + Y_2 = Y$:

| | g_1 | p_1 | g_2 | p_2 | a | b |
|------------|-----------------------------|---|-----------------------------|--|-----------------|-----------------|
| g_1 | $Y_1+Y_2+Y_3$ $+Y_5+Y_8$ | $-Y_5$ | $-Y_1-Y_2$ | $-Y_8$ | | |
| p_1 | $-Y_5+G^{pg1}$ | $Y_5+Y_6+Y_9$ $+Y_{11}+Y_{13}$ $+G^{pp1}$ | $-Y_6$ | $-Y_{11}-Y_{13}$ | Y_{13} | Y_{13} |
| $Y' = g_2$ | $-Y_1-Y_2$ | $-Y_6$ | $Y_1+Y_2+Y_4$ $+Y_6+Y_7$ | Y_7 | | |
| p_2 | $-Y_8$ | $-Y_{11}-Y_{13}$ | $-Y_7+G^{pg2}$ | $Y_7+Y_8+Y_{10}$ $+Y_{11}+Y_{13}$ $+G^{pp2}$ | $-Y_{13}$ | $-Y_{13}$ |
| a | | Y_{13} | | $-Y_{13}$ | $Y_{11}+Y_{13}$ | Y_{13} |
| b | | Y_{13} | | $-Y_{13}$ | Y_{13} | $Y_{13}+Y_{14}$ |

(15.46)

(тензор C_t^{-1} , соединяющий лампу с сетью, имеет единичную матрицу).

Вектор токов ΔI приложен не к узловой паре, а к двум узлам, принадлежащим разным узловым парам E_{g_1} и E_{g_2} . Это означает, что ΔI можно выбрать как вектор, приложенный к катушке Y_1 :

$$\Delta I = \begin{array}{c|c|c|c|c} & 1 & 2 & 3 & 14 \\ \hline & \Delta I^1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array}, \quad (15.47)$$

$$\Delta I' = A_t \Delta I = \begin{array}{c|c|c|c|c|c} & g_1 & p_1 & g_2 & p_2 & a & b \\ \hline & \Delta I^1 & & -\Delta I^1 & & & \end{array}. \quad (15.48)$$

Следовательно, имеются два приложенных тока.

Шесть уравнений $\Delta I' = Y' \Delta E'$ можно свести к трем с помощью формулы редукции. Три оставшихся уравнения легко разрешить относительно ΔE_b .

13. КРИТЕРИЙ ВОЗНИКНОВЕНИЯ КОЛЕБАНИИ

Если в узловой сети происходят колебания, хотя отсутствует приложенный ток ΔI , на некоторых узловых парах наблюдается разность потенциалов ΔE . Причина появления ΔE заключена в существовании (физических) контурных токов Δi , которые, однако, не включены в уравнение.

I. Возникает вопрос: если в уравнении $I = YE$ (или $\Delta I = Y \Delta E$) приложенный ток равен нулю, то может ли быть E отличным от нуля?

Решая уравнение, имеем $E = Y^{-1}I$. Если $I = 0$, $E = Y^{-1}0$. Так как Y^{-1} имеет вид дроби, в числителе которой стоит матрица Y_c , состоящая из всех алгебраических дополнений Y , а в знаменателе — детерминант D от Y , то последнее уравнение можно переписать так:

$$E = Y^{-1}0 = \frac{Y_c}{D} 0. \quad (15.49)$$

Чтобы не все компоненты E равнялись нулю, необходимо, чтобы детерминант D от Y равнялся нулю. В этом случае $E = 0/0$, что может равняться и конечному числу, и соответственно в сети будут наблюдаться колебания.

Следовательно, если детерминант тензора адмиттанса Y равен нулю, в сети могут наблюдаться колебания. Приравнявая детерминант тензора адмиттанса нулю, можно получить необходимое соотношение между параметрами сети, при котором в ней будут наблюдаться колебания.

II. Другой метод состоит в разделении системы на усилительную сеть и оставшуюся сеть обратной связи, имеющие общие входные и выходные узловые пары, и нахождении затем соответствующих тензоров адмиттанса Y_1 и Y_2 . Если отношения входного и выходного напряжений каждой компоненты системы найдены по уравнению (15.31), то, обозначая отношение напряжений усилительной сети через μ , а сети обратной связи через β , критерий возникновения колебаний записывается как

$$\mu\beta = 1. \quad (15.50)$$

14. СЕТИ С ТЕТРОДАМИ

В качестве примера, в котором существенными являются два сеточных напряжения ΔE , рассмотрим сеть избирательного автоматического регулирования (рис. 15.10, а).

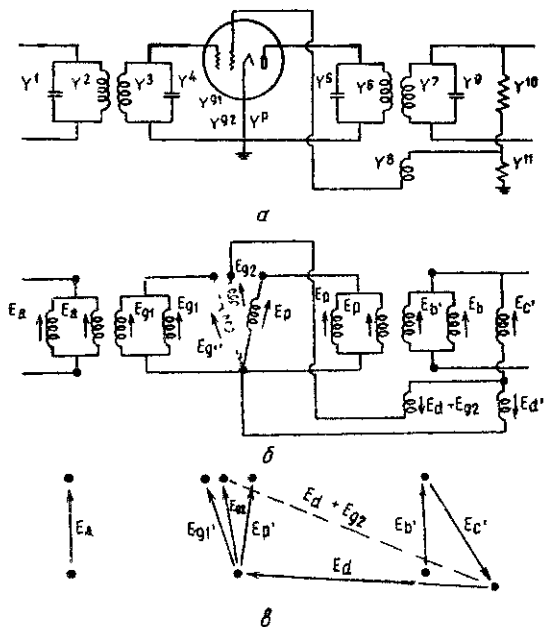


Рис. 15.10. Сеть с тетродом:
а — заданная сеть, б — напряжения, в — выбранные узловые пары.

Сеть имеет 14 катушек, 9 узлов и 2 подсети, а следовательно, $9-2=7$ узловых пар и $14-7=7$ контуров. Выбранные семь узловых пар и соответствующие напряжения на отдельных катушках показаны на рис. 15.10, б и в.

Тензор адмиттанса примитивной сети равен

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | g_1 | g_2 | p | | |
|-------|-------|-------|----------|-------|-------|----------|----------|----------|-------|----------|----------|-------|-------|-------------|-------------|-----------|
| 1 | Y_1 | | | | | | | | | | | | | | | |
| 2 | | Y_2 | Y_{23} | | | | | | | | | | | | | |
| 3 | | | Y_{23} | Y_3 | | | | | | | | | | | | |
| 4 | | | | Y_4 | | | | | | | | | | | | |
| 5 | | | | | Y_5 | | | | | | | | | | | |
| 6 | | | | | | Y_6 | Y_{67} | Y_{68} | | | | | | | | |
| 7 | | | | | | Y_{67} | Y_7 | Y_{78} | | | | | | | | |
| 8 | | | | | | Y_{68} | Y_{78} | Y_8 | | | | | | | | |
| 9 | | | | | | | | | Y_9 | | | | | | | |
| 10 | | | | | | | | | | Y_{10} | | | | | | |
| 11 | | | | | | | | | | | Y_{11} | | | | | |
| g_1 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| g_2 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| p | | | | | | | | | | | | | | $G_{p g_1}$ | $G_{p g_2}$ | $G_{p p}$ |

(15.51)

Приравнивая старые и новые напряжения на каждой катушке, получаем тензор преобразования

| | | | | | | | | | | |
|---------------------|--|--|----------|----------------------|----------------------|----------|----------|----------|----------|---------|
| | | | a | g₁ | g₂ | p | b | c | d | |
| $E_1 = E_a$ | | | 1 | | | | | | | |
| $E_2 = E_a$ | | | 1 | | | | | | | |
| $E_3 = E_{g_1}$ | | | | 1 | | | | | | |
| $E_4 = E_{g_1}$ | | | | 1 | | | | | | |
| $E_5 = E_p$ | | | | | | 1 | | | | |
| $E_6 = E_p$ | | | | | | 1 | | | | |
| $E_7 = E_b$ | | | | | | | 1 | | | |
| $E_8 = E_{g_2}$ | | | | | 1 | | | | 1 | (15.52) |
| $E_9 = E_b$ | | | | | | | 1 | | | |
| $E_{10} = E_c$ | | | | | | | | 1 | | |
| $E_{11} = E_d$ | | | | | | | | | 1 | |
| $E_{g_1} = E_{g_1}$ | | | | 1 | | | | | | |
| $E_{g_2} = E_{g_2}$ | | | | | 1 | | | | | |
| $E_p = E_p$ | | | | | | 1 | | | | |

Результирующий тензор адмиттанса определяется формулой $A_i Y_A$

| | | | | | | | | | |
|--------|----------------------|-------------|----------------------|----------------------|-----------------------|-------------|----------|----------|----------------|
| | | a | g₁ | g₂ | p | b | c | d | |
| $Y' =$ | a | $Y_1 + Y_2$ | Y_{23} | | | | | | |
| | g₁ | Y_{23} | $Y_3 + Y_4$ | | | | | | |
| | g₂ | | | Y_8 | Y_{68} | Y_{78} | | | Y_8 |
| | p | | $G_{p g_1}$ | $Y_{68} + G_{p g_2}$ | $Y_5 + Y_6 + G_{p p}$ | Y_{67} | | | Y_{68} |
| | b | | | Y_{78} | Y_{67} | $Y_9 + Y_7$ | | | Y_{78} |
| | c | | | | | | Y_{10} | | |
| | d | | | Y_8 | Y_{68} | Y_{78} | | | $Y_8 + Y_{11}$ |

(15.53)

Нанесенные жирные линии ускоряют умножение.

Так как входным зажимом является a , а выходным b , то оставшиеся пять осей можно исключить с помощью формулы редукции. Два уравнения, соответствующие осям a и b , разрешают относительно E_b , пользуясь уравнением (15.30).

15. ТЕНЗОР ИМПЕДАНСА ЛАМПЫ

Может случиться, что ламповая сеть будет иметь намного меньше контуров, чем узловых пар. Тогда сеть удобнее анализировать как контурную.

Тензор импеданса z лампы находится обращением тензора адмиттанса Y , данного уравнениями (15.22), (15.26). Следовательно, тензор импеданса тетрода имеет вид

$$z_{mn} = \begin{array}{c|ccc} n & a & b & p \\ \hline m & & & \\ a & \frac{1 - \mu_b \nu_b}{r_b r_p D} & \frac{\eta_b \gamma_a - \gamma_a}{r_a r_p D} & \frac{\gamma_a \nu_b - \nu_a}{r_a r_b D} \\ \hline z_{mn} = b & \frac{\mu_a \nu_b - \eta_b}{r_b r_p D} & \frac{1 - \mu_a \nu_a}{r_a r_p D} & \frac{\eta_b \nu_a - \nu_b}{r_a r_p D} \\ \hline p & \frac{\eta_b \mu_b - \mu_a}{r_b r_p D} & \frac{\mu_a \eta_a - \mu_b}{r_a r_p D} & \frac{1 - \eta_a \eta_b}{r_a r_p D} \end{array} \quad (15.54)$$

где

$$D = \frac{1 + \mu_a (\eta_a \nu_b - \nu_a) + \mu_b (\eta_b \nu_a - \nu_b) - \eta_a \eta_b}{r_a r_b r_p}$$

Тензор импеданса триода имеет вид

$$z_{mn} = \begin{array}{c|cc} n & g & p \\ \hline m & & \\ g & \frac{r_g}{1 - \mu_g \mu_p} & \frac{-\mu_g r_p}{1 - \mu_g \mu_p} \\ \hline z_{mn} = p & \frac{-\mu_p r_g}{1 - \mu_g \mu_p} & \frac{r_p}{1 - \mu_g \mu_p} \end{array} = \begin{array}{c|cc} n & g & p \\ \hline m & & \\ g & Z_{g\epsilon} & Z_{gp} \\ \hline p & Z_{pg} & Z_{pp} \end{array} \quad (15.55)$$

Это означает, что в контурной сети n -электродную лампу можно представить $n-1$ катушками с односторонними собственными и взаимными импедансами точно так же, как $n-1$ -обмоточный трансформатор. Следовательно, тетрод можно представить тремя катушками, а триод — двумя, их соединения представляют катод (рис. 15.11).

Анализ контурной сети, содержащей лампы, ничем не отличается от анализа любой другой контурной сети. Так как сеточ-

ное сопротивление бесконечно, то в конце вычислений в тензоре адмиттанса $y = z^{-1}$ все r_g следует заменить бесконечно большими величинами, что позволит уменьшить число уравнений.

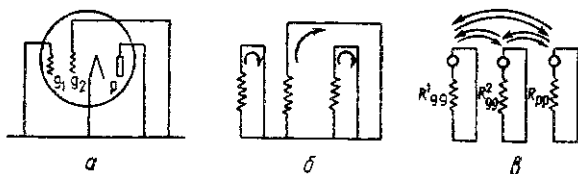


Рис. 15.11.

a — тетрод *б* — эквивалентная контурная сеть; *в* — упрощенная сеть.

16. УСИЛИТЕЛЬ С ВЫРОЖДЕННОЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ

Рассмотрим сеть (рис. 15.12, *a*), представляющую усилитель с вырожденной обратной связью. В ней имеется 14 катушек, 9 узлов, 8 узловых пар и $14 - 8 = 6$ контуров. Выбирая шесть новых токов (рис. 15.12, *б*) (четыре из них в четырех катушках

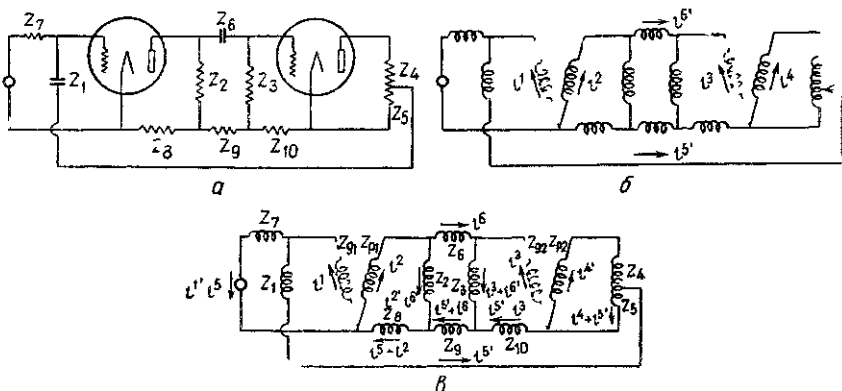


Рис. 15.12 Усилитель с вырожденной обратной связью:

a — заданная сеть; *б* — выбранные токи в ветвях, *в* — токи в отдельных катушках.

ламп), получаем результирующие токи в каждой катушке (рис. 15.12, *в*). Приравнивая старые и новые токи, протекающие в каждой катушке (и используя обозначение i^a вместо Δi^a), имеем

| | 1' | 2' | 3' | 4' | 5' | 6' |
|------------|----------|-----------|-------------------|----|----|----|
| $i^1 =$ | | | | | 1 | |
| $i^2 =$ | $i^{2'}$ | | | | | -1 |
| $i^3 =$ | | $i^{3'}$ | | | | 1 |
| $i^4 =$ | | | $i^{4'}$ | | | |
| $i^5 =$ | | | $i^{4'} + i^{5'}$ | | 1 | 1 |
| $i^6 =$ | | | | | | 1 |
| $i^7 =$ | $i^{1'}$ | | | | -1 | |
| $i^8 =$ | $i^{2'}$ | | | | 1 | |
| $i^9 =$ | | | | | 1 | 1 |
| $i^{10} =$ | | $-i^{3'}$ | | | 1 | |
| $i^{g1} =$ | $i^{1'}$ | | | | | |
| $i^{p1} =$ | $i^{2'}$ | | | | | |
| $i^{g2} =$ | | $i^{3'}$ | | | | |
| $i^{p2} =$ | | | $i^{4'}$ | | | |

$C =$

| | 1' | 2' | 3' | 4' | 5' | 6' |
|----|----|----|----|----|----|----|
| 1 | | | | | 1 | |
| 2 | | 1 | | | | -1 |
| 3 | | | 1 | | | 1 |
| 4 | | | | 1 | | |
| 5 | | | | 1 | 1 | |
| 6 | | | | | | 1 |
| 7 | 1 | | | | -1 | |
| 8 | | 1 | | | 1 | |
| 9 | | | | | 1 | 1 |
| 10 | | | -1 | | 1 | |
| g1 | 1 | | | | | |
| p1 | | 1 | | | | |
| g2 | | | 1 | | | |
| p2 | | | | 1 | | |

(15.56)

Тензор импеданса сети находится как $C_{iZ}C$

| | 1' | 2' | 3' | 4' | 5' | 6' |
|----|-----------------|-----------------------|--------------------------|-----------------------|--|-------------------------|
| 1' | $Z_7 + Z_{gg1}$ | Z_{gp1} | | | $-Z_7$ | |
| 2' | Z_{pg1} | $Z_2 + Z_8 + Z_{pp1}$ | | | Z_8 | $-Z_2$ |
| 3' | | | $Z_3 + Z_{10} + Z_{gg2}$ | Z_{gp2} | $-Z_{10}$ | Z_3 |
| 4' | | | Z_{pg2} | $Z_4 + Z_5 + Z_{pp2}$ | Z_5 | |
| 5' | $-Z_7$ | Z_8 | $-Z_{10}$ | Z_5 | $Z_1 + Z_5 + Z_7 + Z_8 + Z_9 + Z_{10}$ | Z_9 |
| 6' | | $-Z_2$ | Z_3 | | Z_9 | $Z_2 + Z_3 + Z_6 + Z_9$ |

(15.57)

В (15.57) тензор импеданса примитивной сети имеет вид

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | g_1 | p_1 | g_2 | p_2 |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| 1 | Z_1 | | | | | | | | | | | | | |
| 2 | | Z_2 | | | | | | | | | | | | |
| 3 | | | Z_3 | | | | | | | | | | | |
| 4 | | | | Z_4 | | | | | | | | | | |
| 5 | | | | | Z_5 | | | | | | | | | |
| 6 | | | | | | Z_6 | | | | | | | | |
| 7 | | | | | | | Z_7 | | | | | | | |
| 8 | | | | | | | | Z_8 | | | | | | |
| 9 | | | | | | | | | Z_9 | | | | | |
| 10 | | | | | | | | | | Z_{10} | | | | |
| g_1 | | | | | | | | | | | Z_{gg1} | Z_{gp1} | | |
| p_1 | | | | | | | | | | | Z_{pg1} | Z_{pp1} | | |
| g_2 | | | | | | | | | | | | | Z_{gg2} | Z_{gp2} |
| p_2 | | | | | | | | | | | | | Z_{pg2} | Z_{pp2} |

(15.58)

Чтобы найти некоторые токи, оставшиеся строки и столбцы можно исключить с помощью формулы редукции. В тензоре адмиттанса y' нужно представить r_g бесконечно большой величиной, тогда матрица существенно упростится.

17. УПРОЩЕННОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ТРИОДА

Если нет необходимости определять сеточный ток триода Δi_g (практически его значение, как правило, равно нулю), оси g в тензоре импеданса триода можно исключить с помощью формулы редукции $z' = z_1 - z_2 z_4^{-1} z_3$, так что эквивалентным импедансом анода будет

$$r_p' = \frac{r_p}{D} - \left(\frac{-\mu_p r_g}{D} \right) \left(\frac{D}{r_g} \right) \left(\frac{-\mu_g r_p}{D} \right) = \frac{r_p (1 - \mu_p \mu_g)}{1 - \mu_p \mu_g} = r_p \quad (15.59)$$

Итак, катушку, соответствующую сетке, можно опустить в эквивалентной сети триода при замене собственного импеданса анода r_p/D на r_p .

Если напряжение e_g приложено последовательно с катушкой сети или разность потенциалов e_g — падение напряжения на этой катушке, то эквивалентное внешне приложенное напряжение на анодной катушке получают по формуле редукции

$$e'_p = e_p - \left(\frac{-\mu_p r_g}{D} \right) \left(\frac{D}{r_g} \right) e_g = e_p + \mu_p E_g. \quad (15.60)$$

Следовательно, напряжение E_g , появляющееся на катушке сетки, оказывается включенным последовательно с катушкой

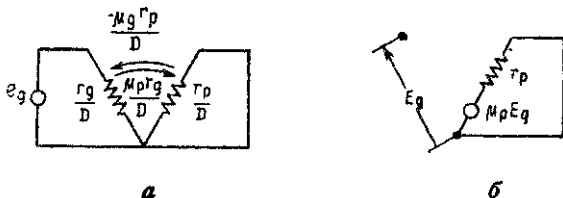


Рис. 15.13.

а — триод как двухконтурная сеть; б — триод как ортогональная сеть (1 контур, 1 узловaя пара).

анода с коэффициентом $\mu_p E_g$ (рис. 15.13, б). Значит, катушкой сетки и ее взаимными импедансами можно пренебречь.

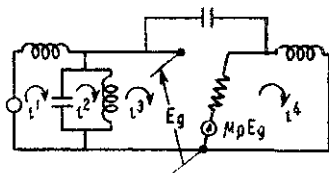


Рис. 15.14. Сеть триода как ортогональная сеть.

Однако сеть, содержащая лампу, на рис. 15.13, б является не контурной, а ортогональной (рис. 15.14), поскольку напряжение на узловой паре E_g должно быть предварительно известно, чтобы найти приложенное контурное напряжение $\mu_p E_g$. Ортогональные сети таких типов изучаются в гл. 21.

ОРТОГОНАЛЬНЫЕ СЕТИ

1. НАПРЯЖЕНИЯ И ТОКИ В КОНТУРНЫХ И УЗЛОВЫХ СЕТЯХ

I. В контурной сети n катушек образуют k контуров. В общем случае имеется n известных приложенных напряжений e , каждое из которых предполагается последовательно соединенным с отдельной катушкой. Поскольку известно только k токов отклика i' , при получении k уравнений $e' = z'i'$ n известных напряжений катушек e заменяются посредством k приложенных контурных напряжений e' с помощью $e' = C_1 e$.

Обычно предполагается, что k новых переменных i' протекают в k ветвях. В гл. 6, § 7 было показано, что k новых компонент приложенного напряжения e' можно считать сконцентрированными в тех же самых k ветвях, в которых предполагается наличие новых компонент i' . Таким образом, все приложенные к контурам напряжения можно сконцентрировать в единое напряжение e' , приложенное к ветви, в которой протекает i' .

Когда приложенное напряжение имеется в безымпедансной ветви, то полагают, что эта ветвь имеет импеданс нулевой величины, так что ветвь считается катушкой и рассматривается как катушка в примитивной контурной сети. Такую безымпедансную ветвь с известным приложенным напряжением будем называть «воображаемой катушкой». Присутствие «воображаемых катушек» требует большего числа координатных осей, чем это абсолютно необходимо. Эти дополнительные оси должны быть введены для того, чтобы можно было обращаться с сетью, как с контурной, а не как с ортогональной, имеющей более сложное уравнение напряжения.

II. В узловой сети n катушек образуют $n-k$ узловых пар. В общем случае имеется n известных приложенных токов I (или токов, отбираемых внешними нагрузками), каждый из которых, как предполагается, приложен к узлам отдельной катушки. Поскольку имеется только $n-k$ напряжений отклика E' , n известных приложенных катушечных токов I при получении $n-k$ уравнений $I' = Y'E'$ заменяются на $n-k$ приложенных узловых токов посредством преобразования $I' = C^{-1}I$.

И $n-k$ новых переменных E' , и $n-k$ новых приложенных токов I' рассматриваются на одних и тех же $n-k$ узловых парах.

Если воздействующий ток (внешняя нагрузка) проходит через два узла, между которыми нет катушек, предполагается, что два узла соединены безадмиттансной катушкой. В примитивной узловой сети эта катушка появляется и вводит дополнительную координатную ось. Такая безадмиттансная ветвь с известным действующим током называется «воображаемой катушкой».

III. Одна из задач последующего анализа состоит в том, чтобы перейти от примитивных сетей, катушки которых имеют нулевой импеданс или адмиттанс, так, чтобы сеть полностью описывалась только теми катушками, которые имеют действительный импеданс или адмиттанс. Таким образом, *все воображаемые катушки и, следовательно, все лишние координатные оси исчезнут из анализа ортогональных сетей.*

IV. «Контур» и «узловая пара» (или их эквивалент «ветвь» и «открытый контур») в общем случае будут называться «координатной осью».

2. НАПРЯЖЕНИЯ И ТОКИ В ОРТОГОНАЛЬНЫХ СЕТЯХ

I. Каждая k -контурная сеть из n катушек содержит также $n-k$ узловых пар, на которых возникают измеряемые разности потенциалов E' и присутствие которых до сих пор не принималось во внимание при написании уравнений напряжения. (Разности потенциалов, возникающие на всех отдельных катушках, рассчитанные посредством вспомогательного уравнения $e_r = zC_i'$, не являются напряжением узловых пар.) Для завершенности картины можно также предположить, что через $n-k$ узловых пар действуют токи I' , имеющие нулевые значения.

Таким образом, любую контурную сеть можно фактически рассматривать как ортогональную сеть, на которую воздействуют i и I и в которой как отклик возникают i и E . Из-за отсутствия I и из-за того, что не нужно находить E , оси узловых пар до сих пор не принимались во внимание.

II. Аналогично каждая узловая сеть с $n-k$ узловыми парами содержит k контуров, в которых протекают контурные токи i' и наличие которых до сих пор не принималось во внимание при записи уравнения тока. (Токи, протекающие во всех отдельных катушках, вычисляемые с помощью вспомогательного уравнения $I_c = YC_i^{-1}E'$, представляют собой полный ток, но не ток отклика.) Для завершенности картины можно также предположить, что имеются приложенные контурные напряжения e , значение которых равно нулю.

Таким образом, любую узловую сеть можно фактически рассматривать как ортогональную сеть, на которую воздействуют

I и e и отклик которой есть E и i . Из-за отсутствия e и из-за того, что не нужно находить i , контурные оси до сих пор игнорировались.

III. В общем случае ортогональная сеть из n катушек образует k контуров и $n-k$ узловых пар. В общем случае n напряжений приложены последовательно с каждой катушкой и n токов I воздействуют (отбираются) параллельно каждой катушке. При замене $2n$ воздействующих величин e и I для отдельных катушек их значениями e' и I' вдоль контуров и узловых пар согласно $e' = C_e e$ и $I' = C^{-1} I$ можно видеть (если C несингулярна), что (вместо k) имеется лишь n известных приложенных величин напряжения e' и n (вместо $n-k$) известных воздействующих величин тока I . Таким образом (на узловых парах открытых контуров), существуют теперь известные приложенные напряжения e' , а около контуров (закрытых контуров) — известные воздействующие токи I' .

В результате приложенных n катушечных напряжений e и катушечных токов I возникают k токов отклика i в контурах и $n-k$ напряжений отклика E на узловых парах. Всего имеется n величин отклика, действующих как n переменных.

IV. Представленный ниже метод анализа ортогональных сетей основывается на двух соображениях:

1) число переменных и уравнений должно быть равно числу катушек независимо от способа их соединения или возбуждения или числа воображаемых катушек;

2) входная мощность $e^* i$ и выходная мощность $E^* I$ должны оставаться инвариантными при всех способах соединения и возбуждения n катушек.

Эти постулаты делают возможным построение несингулярного тензора преобразования C , имеющего n строк и столбцов для всех n катушечных сетей. Это позволит при анализе и синтезе переходить от любой n катушечной сети к любой другой n катушечной сети без проверки метода возбуждения каждой сети для существования воображаемых катушек.

Поскольку несколько катушек можно объединить в одну эквивалентную катушку, всегда будет предполагаться, что рассматриваемая сеть представляет собой редуцированную исходную сеть.

3. КОВАРИАНТНЫЕ И КОНТРАВАРИАНТНЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ

I. В ортогональной сети имеются переменные величины двух типов: 1) k контравариантных переменных i^m , протекающих в замкнутых контурах; 2) $n-k$ ковариантных переменных E_u , возникающих на открытых контурах или узловых парах.

Между контравариантными и ковариантными переменными существует интересная взаимосвязь, которая открывает простой метод анализа ортогональных сетей.

II. Когда ветвь, по которой протекает контурный ток i^a , раскрывается, эта частная контравариантная переменная обращается в нуль. *Вместо нее возникает другая переменная, которая, однако, является ковариантной*, а именно, разность потенциалов E_a на открытой ветви.

Подобным образом, когда узловая пара с разностью потенциалов E_a замыкается накоротко, эта частная переменная обращается в нуль. *Вместо нее возникает другая новая переменная, являющаяся ковариантной*, а именно, контурный ток i^a , протекающий в новом контуре.

В общем случае в любой динамической системе, когда контравариантная переменная (скажем, *скорость* v^a по некоторому направлению) редуцируется в нуль при введении некоторой связи, вместо нее немедленно появляется ковариантная переменная (скажем, *сила реакции* f_a связи). Аналогично, когда ковариантная переменная (скажем, *сила реакции* f_a) обращается в нуль, вместо нее появляется новая контравариантная переменная (*скорость* v^a по направлению исчезнувшей силы).

Во время добавления и устранения связей структура динамической системы не изменяется, *а наличие связей только изменяет относительное число ковариантных и контравариантных переменных*, сумма которых при этом остается постоянной.

4. ИЗВЕСТНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ ОТКЛИКА

I. Переменная вдоль определенной оси до возникновения двойственной величины не обязательно должна обращаться в нуль. *Если переменная i' (или E') по некоторому направлению известна, то двойственная ей переменная E' (или i') все еще проявляется по этому же направлению*. Конечно, известная i' (или E') не является теперь переменной величиной и имеется по каждой оси еще одна переменная (ковариантная или контравариантная). (В динамике такие случаи встречаются при «движущихся связях».) Следовательно, вдоль каждой оси существуют величины отклика i' и E' , одна из которых имеет известное значение, а другая является переменной.

II. *Воображаемые катушки представляют собой такие координатные оси, вдоль которых возникают два типа величин отклика*. В частности: 1) если известное напряжение существует в безымпедансной ветви, то известное приложенное напряжение обозначается через E , а неизвестный ток через i ; 2) если известный ток воздействует на безадмиттансную ветвь, то известный ток обозначается как i , а неизвестная разность потенциалов как E .

Таким образом, *при наличии воображаемых катушек число величин отклика i и E может быть равно $2n$ так же, как и число воздействующих величин e и I может быть равно $2n$* . Однако число переменных величин во всех случаях равно n .

III. Следовательно, вдоль каждой оси из n координатных осей может существовать четыре величины: два напряжения e и E и два тока I и i . Два напряжения нельзя объединить в одно выражение, поскольку одно из них известно, а второе неизвестно. Точно так же не могут быть объединены два тока I и i , протекающие в одной и той же катушке.

5. ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ЧИСТО-КОНТУРНЫЕ И ЧИСТО-УЗЛОВЫЕ СЕТИ

I. Поскольку можно вводить воображаемые катушки без нарушения режима работы сети, то с помощью воображаемых катушек «закрытый контур» можно превратить в «открытый контур»

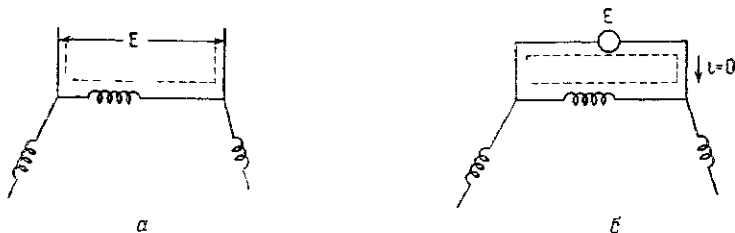


Рис. 16.1. Замена открытого контура закрытым:
а — открытый контур, б — закрывание открытого контура.

тур» и наоборот. В частности: 1) можно считать, что любой открытый контур закрыт воображаемой катушкой, имеющей неизвестное воздействующее E и нулевое i (рис. 16.1, а, б); 2) любой

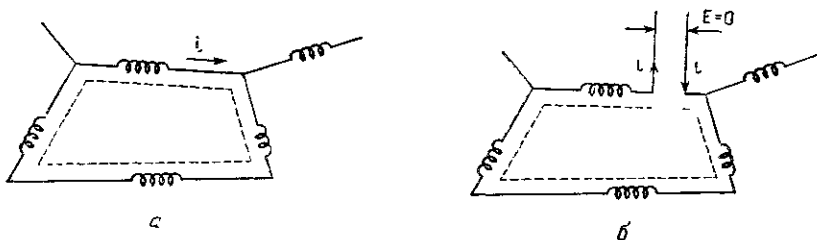


Рис. 16.2. Замена закрытого контура открытым:
а — закрытый контур; б — открывание закрытого контура.

закрытый контур можно рассматривать как открытый, в разрыве которого имеется воображаемая катушка с неизвестным i в узлах и нулевым E (рис. 16.2, а, б). (Считается, что два узла, полученные при открывании контура, не соединены вместе обычной катушкой, но, поскольку в этих узлах протекают идентичные токи, два узла можно рассматривать как соединенные воображаемой катушкой.)

II. Следовательно, предполагается, что любая ось представляет либо узловую пару, либо контур в зависимости от значения переменных i и E , существующих на этой оси: 1) если E неизвестно, ось является «узловой парой»; 2) если i неизвестно, ось является «контуром».

III. Поскольку каждую узловую пару ортогональной сети можно рассматривать как закрытую неизвестным напряжением E , то после введения при этом воображаемой катушки каждая ортогональная сеть становится эквивалентной чисто-контурной

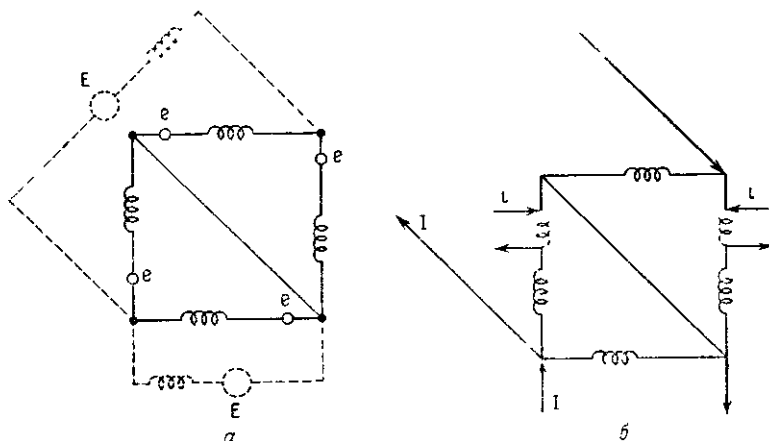


Рис. 16.3. Эквивалентность контуров и узловых пар:
 а — закрывание узловых пар; б — открывание контуров.

сети, в которой напряжение приложено не только последовательно с действительными катушками (как показано на рис. 16.3, а), но и последовательно с некоторыми из воображаемых катушек.

Подобным образом, поскольку каждый контур ортогональной сети можно рассматривать как контур, открытый посредством приложения неизвестного тока i в каждом разрыве, всякая ортогональная сеть эквивалентна чисто-узловой сети, в которой токи воздействуют не только параллельно (*in shunt*) каждой действительной катушке (как показано на рис. 16.3, б), но и параллельно некоторым воображаемым катушкам.

IV. Каждая закрытая узловая пара связывает воображаемую катушку с чисто-контурной сетью, а каждый открытый контур связывает воображаемую катушку с чисто-узловой сетью.

Напряжение, появляющееся на воображаемой катушке, обозначается E . В примитивной сети воображаемые катушки не появляются.

Суммируя, можно заметить, что:

1) воздействующие векторы e и i ассоциируются с действительными катушками;

2) векторы отклика I и E ассоциируются с воображаемыми катушками.

6. ИНВАРИАНТНОСТЬ ВХОДНОЙ И ВЫХОДНОЙ МОЩНОСТИ

1. В чисто-контурной сети, содержащей только e и i (см. рис. 4.1), входная мощность e^*i остается инвариантной независимо от того, как соединены катушки, поскольку в любом взаимосоединении каждая катушка является короткозамкнутой на себя и ток через нее остается неизменным. Когда в чисто-контур-

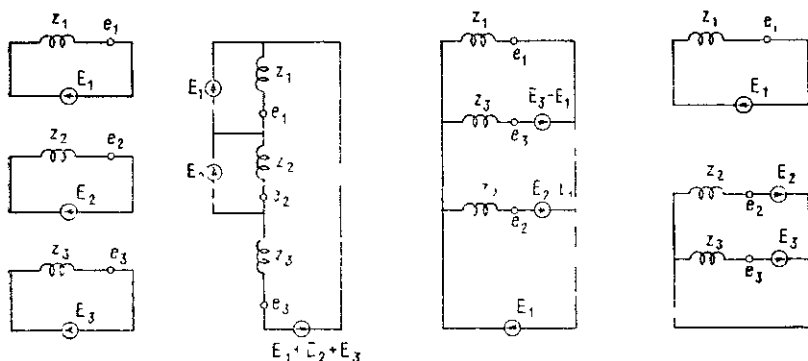


Рис. 16.4. Различные типы соединения трех катушек, образующих три контура (одно и то же E приложено к каждой катушке).

ной сети с заданными e и i воздействующими являются также токи I в параллельном соединении с каждой катушкой, входная мощность e^*i остается еще инвариантной в любом взаимосоединении. Однако, когда n катушек образуют k -контурную сеть, токи в катушках становятся различными и e^*i не является больше инвариантной.

Если вместо двух понятий e и i с сетью ассоциируются четыре электромагнитных понятия, а именно e , i , E и I , то при любых приложенных напряжениях и токах все сети (контурные и ортогональные) можно рассматривать как чисто-контурные сети, следовательно, при любом соединении катушек в сетях входная e^*i и выходная E^*I мощность остается инвариантной.

Это утверждение верно, поскольку можно предположить, что на каждой катушке при любом взаимосоединении существуют лишь одинаковые разности потенциалов E (рис. 16.4, где три катушки образуют четыре разные чисто-контурные сети).

(Способ преобразования напряжения E следует автоматически из уравнений, которые будут получены в этом параграфе.)

Необходимо заметить, что напряжение E , приложенное последовательно с безымпедансной катушкой, также последовательно и с некоторыми другими катушками, поэтому инвариантность E^*I не так уж очевидна.

II. Аналогичные соображения относятся и к чисто-узловой сети. Если вместо двух электрических понятий (E и I) с сетью ассоциируется четыре понятия (e , i , E и I), то при любых приложенных напряжениях и токах все сети можно рассматривать как чисто-узловые и при любых соединениях катушек входная мощность e^*i и выходная E^*I все же остаются инвариантными.

Это действительно так, поскольку можно предположить, что при любых взаимосоединениях (рис. 16.5) через каждую катуш-

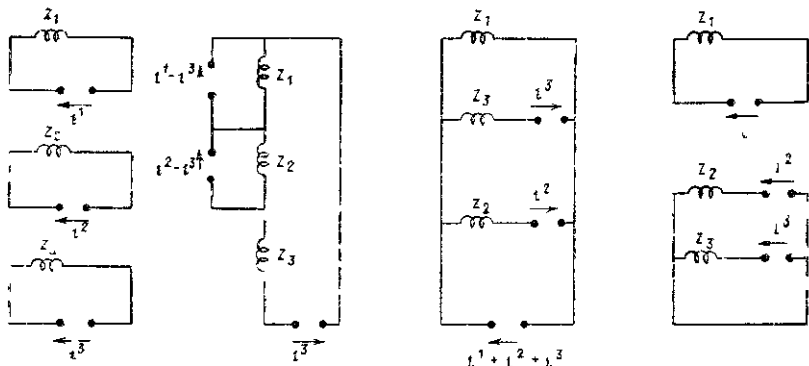


Рис. 16.5. Различные типы соединения трех катушек, образующих три узловые пары (один и тот же I протекает в каждой катушке).

ку протекает один и тот же ток i . (Следует заметить, что ток i , действующий в безадмиттансной катушке, протекает через некоторые другие катушки, следовательно, инвариантность e^*i не является совершенно очевидной.)

III. Итак, при взаимосоединении n катушек в сети различных типов входную мощность e^*i и выходную E^*I можно сделать инвариантной:

$$e^*i = e^*i', \quad e_a i^a = e_a i'^a, \quad (16.1)$$

$$E^*I = E^*I', \quad E_a I^a = E_a I'^a, \quad (16.2)$$

$$\begin{aligned} (e + E)^*(I + i) &= (e_a + E_a)(I^a + i^a) = \\ &= (e' + E')^*(I' + i'), \quad = (e_a' + E_a')(I'^a + i'^a). \end{aligned} \quad (16.3)$$

Для этого при любом способе соединения катушек вводят четыре электрические величины (e , i , E и I) вместо двух величин (e , i или E , I), причем любые три из четырех величин сохраняются неизменными в каждой катушке, в то время как взаимо-

соединения могут изменяться. При взаимосоединении n катушек изменяются значения n из $4n$ электрических величин или любых их линейных комбинаций.

В общем случае каждую сеть можно рассматривать как чисто-контурную, чисто-узловую или ортогональную сеть и так далее, в зависимости от того, какие компоненты \mathbf{i} и \mathbf{E} считаются переменными. В частности, сеть: 1) чисто-контурная, если все \mathbf{i} переменные; 2) чисто-узловая, если все \mathbf{E} переменные; 3) ортогональная, если некоторые \mathbf{E} и некоторые \mathbf{i} переменные; 4) контурная, если некоторые \mathbf{i} переменные; 5) узловая, если некоторые \mathbf{E} переменные.

7. УРАВНЕНИЯ НАПРЯЖЕНИЯ И ТОКОВ

I. Хотя на каждой координатной оси имеется два типа напряжений e и E и два типа токов I и i (некоторые из которых известны, а некоторые неизвестны), в каждый момент времени результирующие токи и напряжения удовлетворяют закону Ома.

Следовательно:

1. Уравнения напряжения ортогональной сети при рассмотрении ее как чисто-контурной имеют вид

$$\mathbf{E} + \mathbf{e} = \mathbf{z}(\mathbf{i} + \mathbf{I}), \quad E_{\alpha} + e_{\alpha} = z_{\alpha\beta}(i^{\beta} + I^{\beta}). \quad (16.4)$$

2. Уравнения токов ортогональной сети при рассмотрении ее как чисто-узловой имеют вид

$$\mathbf{i} + \mathbf{I} = \mathbf{Y}(\mathbf{E} + \mathbf{e}), \quad i^{\sigma} + I^{\sigma} = Y^{\alpha\beta}(\bar{E}_{\beta} + e_{\beta}). \quad (16.5)$$

При выводе уравнений все компоненты e и \mathbf{I} предполагаются известными, а компоненты \mathbf{i} и \mathbf{E} частично известными, а частично неизвестными. На каждой оси можно задать только одну переменную величину (i или E). Однако при манипулировании с уравнениями любые n из $4n$ величин могут быть неизвестными.

Известное воздействующее напряжение можно рассматривать произвольно как компоненту \mathbf{E} или e (в зависимости от того, считаются ли зажимы генератора узловыми парами или нет). Это отражается лишь на перераспределении известных компонент напряжения между \mathbf{E} и e , а \mathbf{z} сохраняется неизменным. Аналогично эффект произвольного рассмотрения известного воздействующего тока как компоненты \mathbf{i} или \mathbf{I} (в зависимости от того, считается ли катушка, соединяющая два узла, за две последовательные катушки или нет) также состоит лишь в перераспределении известных компонент тока между \mathbf{i} и \mathbf{I} при сохранении \mathbf{Y} неизменным.

II. В общем случае каждый вектор имеет столько компонент, сколько имеется координатных осей. Два вектора e_{α} и E_{α} (или i^{α} и I^{α}) нельзя сложить, поскольку в таком случае каждая компонента результирующего вектора разделяется на две части,

одна из которых известна, а другая неизвестна. Чтобы получить решение для неизвестных компонент, результирующий вектор необходимо разложить на его известный и неизвестный составляющие векторы.

8. ЭТАПЫ ВЫВОДА УРАВНЕНИЯ НАПРЯЖЕНИЯ

I. Уравнение напряжения ортогональной сети получено при рассмотрении ее как чисто-контурной сети, в которой все узловые пары закрыты воображаемыми катушками.

Точно так же, как и во всех первоначально рассмотренных сетях, величины отклика i' и E' определяются на n произвольных

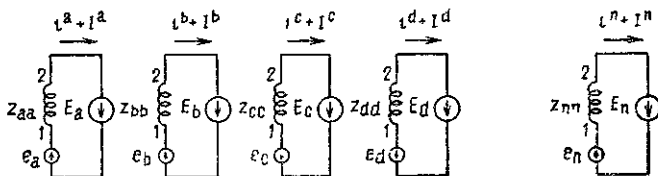


Рис. 16.6. Общая форма примитивной контурной сети.

осях, а воздействующие величины e' и I' — преобразованием из e и I примитивной сети.

Поскольку воображаемые катушки в примитивной сети не появляются, все известные воздействующие величины, ассоциированные с воображаемыми катушками, следует рассматривать как известные величины отклика i' и E' (т. е. они не могут появиться в I' или e' , которые происходят от I и e примитивной сети). Вдоль различных катушек произвольно выбирают n координатных осей.

Из предосторожности все воображаемые катушки должны рассматриваться как координатные оси.

II. Когда сетевая диаграмма соответствует действительной физической структуре (рис. 16.7), для *известных* величин используются следующие обозначения (предполагается, что величины со штрихами относятся к действительной сети, а без штрихов — к примитивной):

1) все известные напряжения в последовательном соединении с катушками обозначаются через e ;

2) все известные напряжения в последовательном соединении с безымпедансной ветвью обозначаются через E' (первоначально они также обозначались через e);

3) все известные токи, приложенные к катушке, обозначаются через I ;

4) все известные токи, воздействующие на безадмиттансную ветвь, обозначаются через i' (первоначально они также обозначались через I).

III. Прimitivesкая контурная сеть для сети, изображенной на рис. 16.7, показана на рис. 16.6. Она теперь содержит четыре величины вместо двух: два последовательных напряжения (e и E) и два тока (i и I).

Компонентами e являются известные напряжения, приложенные *последовательно с каждой действительной катушкой* сети, а компонентами I известные токи, воздействующие (или отбираемые нагрузками) в каждой действительной катушке сети.

IV. Несингулярный тензор преобразования C ортогональной сети получается тем же способом, как и для любой чисто-контурной сети (см. гл. 4, § 12).

При выводе соотношения $i = C I'$ не существенно, являются ли компоненты i' известными величинами или переменными.

V. Если C один раз получен, то новые компоненты тензора импеданса z' сети находят по $C_1 z C$.

Новые компоненты величин *отклика* частично известны, а частично нет. В частности:

1. *Предполагается*, что компоненты i' заданы в следующем виде: 1) на осях действительных катушек они равны нулю (известны); 2) на осях безадмиттансных катушек они обычно известны; 3) на всех остальных осях (в контурах) они обычно неизвестны (т. е. на осях узловых пар они известны, а на контурных осях неизвестны).

2. *Предполагается*, что компоненты E' заданы в следующем виде: 1) на действительных катушках они равны нулю (т. е. известны); 2) на безымпедансных катушках они обычно известны; 3) на всех других осях (узловых парах) они обычно неизвестны (т. е. на всех контурных осях они известны, на осях узловых пар они неизвестны).

Новые компоненты *воздействующих* величин рассчитывают исходя из величин primitivesкой сети.

В частности:

3. Компоненты e' *рассчитывают* по соотношению $e' = C_1 e$, в котором компоненты e обычно известны.

4. Компоненты I' *рассчитывают* по соотношению $I' = C^{-1} I$, в котором компоненты I обычно известны.

Если оси узловых пар выбирают по тем же катушкам, по которым действуют токи I , то компоненты I' заранее известны без всякого расчета.

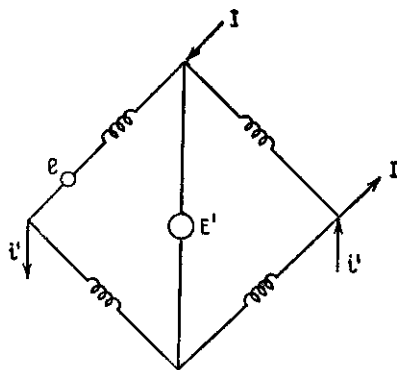


Рис. 16.7. Обозначение известных токов и напряжений.

В сетях на рис 16.4 компоненты E' не задаются, а рассчитываются из компонент E примитивной контурной сети по соотношению $E' = C_t E$. Эта процедура продемонстрирована на примере (рис. 16.4), чтобы показать, как определить E' для различных сетей, сохраняя неизменным E на каждой катушке и поэтому сохраняя мощность инвариантной. Для всех остальных сетей в этой главе E примитивной сети можно рассчитать по выбранным значениям E' действительной сети обратным шагом $E = C_t^{-1} E'$, однако такой расчет не сделан, поскольку при анализе действительной сети в этом нет необходимости).

VI. В окончательной системе уравнений $E' + e' = z'(i' + I')$ имеется столько же токовых переменных i' , сколько контуров, и столько же переменных напряжений E' , сколько узловых пар в сети. Полное число переменных равно числу действительных катушек.

Воображаемые катушки действительной сети нигде больше не появляются, следовательно, они не увеличивают число координатных осей. Их роль состоит в том, что с их помощью вводятся известные компоненты E' и i' .

9. ПРИМЕР ОРТОГОНАЛЬНОЙ СЕТИ

I. Допустим, что уравнение напряжения ортогональной сети (рис. 16.8, а) уже получено. Все токи и напряжения, показанные на рисунке, известны; некоторые напряжения и токи являются

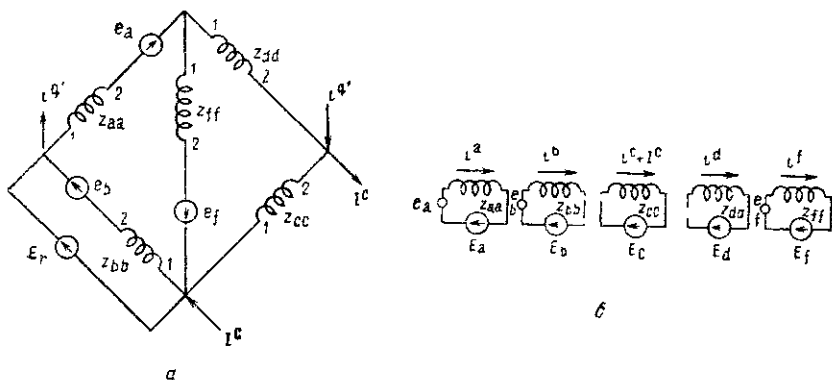


Рис. 16.8. Ортогональная сеть с приложениями e, I, E', i' :
а — заданная сеть; б — ее примитивная контурная сеть.

воздействующими для воображаемых катушек, и поэтому они обозначены как E' и i' вместо e и i .

В сети имеется пять катушек и три контура и, следовательно, две узловые пары. Одну из узловых пар следует выбирать на узлах, через которые проходит ток i^a , другую — произвольно на катушке Z_{aa} . В эквивалентную чисто-контурную сеть (рис. 16.9) введены как воображаемые катушки еще две узловые пары.

II. Прimitivesкая контурная сеть заданной сети показана на рис. 16.8, б. Компоненты геометрических объектов:

$$e = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & f \\ \hline e_a & e_b & 0 & 0 & e_f \\ \hline \end{array} , \quad z = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & f \\ \hline Z_{aa} & & & & \\ \hline b & Z_{bb} & & & \\ \hline c & & Z_{cc} & & Z_{cf} \\ \hline d & & & Z_{dd} & \\ \hline f & & Z_{fc} & & Z_{ff} \\ \hline \end{array} \end{array}$$

$$I = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & f \\ \hline 0 & 0 & I^c & 0 & 0 \\ \hline \end{array} , \end{array}$$

В общем случае сеть предполагается асимметричной, так что Z_{cf} не равно Z_{fc} . Все компоненты e и I являются известными ве-

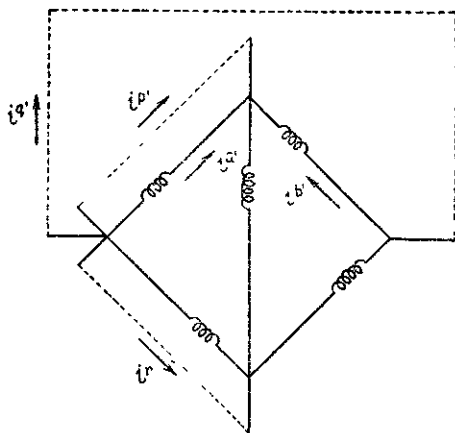


Рис. 16.9. Эквивалентная сеть.

личинами. Компоненты i и E не представляют интереса при расчете новой сети, поскольку i' и E' не являются производными от них, а выбираются произвольно (как в контурных сетях, так и в узловых).

III. Матрица преобразования чисто-контурной сети (см. рис. 16.9) устанавливается заданием первых пяти новых токовых переменных i' . Предполагается, что три из новых токов протекают в трех воображаемых катушках.

Токи, протекающие по отдельным катушкам, получают с помощью первого закона Кирхгофа (рис. 16.10).

Приравниваем старые и новые значения токов, протекающих в каждой катушке:

$$\begin{aligned}
 i^a &= i^{a'} \\
 i^b &= -i^{a'} + i^{p'} + i^{q'} + i^{r'} \\
 i^c &= i^{b'} - i^{q'} \\
 i^d &= -i^{b'} \\
 i^f &= i^{a'} + i^{b'} + i^{p'}
 \end{aligned}
 \quad C =$$

| | a' | b' | p' | q' | r' |
|---|----|----|----|----|----|
| a | 1 | | | | |
| b | -1 | | 1 | 1 | 1 |
| c | | 1 | | -1 | |
| d | | -1 | | | |
| f | 1 | 1 | 1 | | |

(16.6)

Коэффициенты при значениях новых токов дают несингулярную матрицу преобразования С.

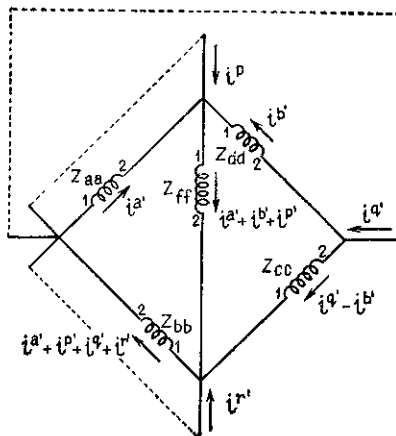


Рис. 16.10. Токи в катушках чисто-контурной сети.

IV. Контравариантными величинами отклика являются

$$i' = \begin{array}{|c|c|c|c|c|}
 \hline
 & a' & b' & p' & q' & r' \\
 \hline
 i' & i^{a'} & i^{b'} & 0 & i^{q'} & i^{r'} \\
 \hline
 \end{array}$$

Компонента $i^{p'}$ на оси p' узловой пары известна и равна нулю. Воздействующий ток $i^{q'}$ в первоначальной воображаемой катушке q' также известен. Следовательно, контравариантными переменными являются переменные трех первоначальных контуров, а именно $i^{a'}$, $i^{b'}$ и $i^{r'}$.

Ковариантные величины отклика записываются как

$$E' = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline & a' & b' & p' & q' & r' \\ \hline & 0 & 0 & E_{p'} & E_{q'} & E_{r'} \\ \hline \end{array}.$$

По контурным осям a' и b' известными и равными нулю величинами являются компоненты E_a , или $E_{b'}$, а для первоначальной воображаемой катушки r' известной величиной является приложенное напряжение $E_{r'}$. Следовательно, ковариантными оказываются переменные двух первоначальных узловых пар, а именно E_p' и E_b' .

Полное число переменных (неизвестных) равно пяти, по одной на каждой координатной оси.

V. Как только несингулярный тензор преобразования получен, геометрические объекты z' , I' и e' новой сети устанавливаются автоматически.

Новые компоненты тензора импеданса находят по формуле $C_i z C$

| | a' | b' | p' | q' | r' |
|-----------|----------------------------|--|-------------------|--------------------|----------|
| a' | $Z_{aa} + Z_{bb} + Z_{ff}$ | $Z_{fc} + Z_{ff}$ | $Z_{bb} + Z_{ff}$ | $Z_{bb} - Z_{fc}$ | Z_{bb} |
| b' | $Z_{cf} + Z_{ff}$ | $Z_{cc} + Z_{cf} + Z_{dd} + Z_{fc} + Z_{ff}$ | $Z_{cf} + Z_{ff}$ | $-Z_{cc} - Z_{fc}$ | 0 |
| $z' = p'$ | $Z_{bb} + Z_{ff}$ | $Z_{fc} + Z_{ff}$ | $Z_{bb} + Z_{ff}$ | $Z_{bb} - Z_{fc}$ | Z_{bb} |
| q' | $Z_{bb} - Z_{cf}$ | $-Z_{cc} - Z_{cf}$ | $Z_{bb} - Z_{cf}$ | $Z_{bb} + Z_{cc}$ | Z_{bb} |
| r' | Z_{bb} | 0 | Z_{bb} | Z_{bb} | Z_{bb} |

(16.7)

VI. Новые компоненты вектора e' приложенного напряжения по $C_i e C$ равны

$$e' = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline & a' & b' & p' & q' & r' \\ \hline & e_a + e_b + e_f & e_f & e_b + e_f & e_b & e_b \\ \hline \end{array}. \quad (16.8)$$

Все эти компоненты известны.

Чтобы найти вектор I' воздействующего тока, нужно рассчитать матрицу, обратную C , решая систему уравнений (16.6) относительно величин со штрихами.

| | | | a | b | c | d | f | |
|---|--|--|----|---|----|----|----|--------|
| $i^{a'} = i^a$ | | | 1 | | | | | |
| $i^{b'} = -i^d$ | | | | | | -1 | | |
| $i^{p'} = -i^a + i^d + i^f C^{-1} = i^{p'}$ | | | -1 | | | 1 | 1 | (16.9) |
| $i^{q'} = -i^c - i^d$ | | | | | -1 | -1 | | |
| $i^{r'} = i^b + i^c - i^f$ | | | | 1 | 1 | | -1 | |

Новые воздействующие контурные токи на C^{-1} . I равны

$$I' = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline a' & b' & p' & q' & r' \\ \hline 0 & 0 & 0 & -i^c & i^c \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline a' & b' & p' & q' & r' \\ \hline I^{a'} & I^{b'} & I^{p'} & I^{q'} & I^{r'} \\ \hline \end{array}. \quad (16.10)$$

Все эти компоненты являются известными величинами.

VII. Уравнение напряжения сети имеет вид

$$E' + e' = z' \cdot (i' + I'), \quad E_{\alpha'} + e_{\alpha'} = z_{\alpha' \beta'} (i^{\beta'} + I^{\beta'}). \quad (16.11)$$

Все компоненты e' и I' — известные величины, в то время как компоненты E' и i' частично известны, а частично нет. В таком виде уравнение относительно неизвестных решить нельзя.

10. «ОРТОГОНАЛЬНЫЕ» УРАВНЕНИЯ НАПРЯЖЕНИЯ

I. Чтобы решить уравнение напряжения ортогональных сетей, необходимо подразделить их на два инвариантных уравнения вдоль осей контуров и узловых пар. Тогда, подразделив e на $e_1 + e_2$ и другие (см. гл. 9, § 2) и опустив штрихи у индексов, «ортогональное» уравнение напряжения можно представить в виде

$$\left. \begin{aligned} E_1 + e_1 &= z_1 (i^1 + I^1) + z_2 (i^2 + I^2), \\ E_2 + e_2 &= z_3 (i^1 + I^1) + z_4 (i^2 + I^2), \end{aligned} \right\} \quad (16.12)$$

$$\left. \begin{aligned} E_m + e_m &= z_{mn} (i^n + I^n) + z_{mv} (i^v + I^v), \\ E_u + e_u &= z_{un} (i^n + I^n) + z_{uv} (i^v + I^v). \end{aligned} \right\}$$

Эти уравнения можно подвергнуть различным преобразованиям.

II. Можно различить следующие специальные случаи:

1. Если к безымпедансным ветвям не приложены известные напряжения, то $E_1 = 0$.

2. Если известные токи через два узла, которые не связаны катушкой, не являются воздействующими (или связанными с нагрузкой), то $i^2 = 0$. Таким образом, в случае отсутствия вообра-

жаемых катушек приведенные выше уравнения приобретают вид

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= \mathbf{z}_1(\mathbf{i}^1 + \mathbf{I}^1) + \mathbf{z}_2 \mathbf{I}^2, & e_m &= z_{mn}(i^n + I^n) + z_{mv} I^v, \\ \mathbf{E}_2 + \mathbf{e}_2 &= \mathbf{z}_3(\mathbf{i}^1 + \mathbf{I}^1) + \mathbf{z}_4 \mathbf{I}^2, & E_u + e_u &= z_{un}(i^n + I^n) + z_{uv} I^v. \end{aligned} \quad (16.13)$$

Переменными являются \mathbf{i}^1 и \mathbf{E}_2 .

3. Если в качестве новых узловых пар выбрать все нагрузочные клеммы, то не будет существовать ни одного действующего контурного тока $\mathbf{I}^1 = 0$.

Если все три случая представлены одновременно, уравнения приобретают вид

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= \mathbf{z}_1 \mathbf{i} + \mathbf{z}_2 \mathbf{I}, & e_m &= z_{mn} i^n + z_{mv} I^v, \\ \mathbf{E} + \mathbf{e}_2 &= \mathbf{z}_3 \mathbf{i} + \mathbf{z}_4 \mathbf{I}, & E_u + e_u &= z_{un} i^n + z_{uv} I^v. \end{aligned} \quad (16.14)$$

Переменными являются \mathbf{i} и \mathbf{E} .

4. Если известные напряжения действуют только на закрытые контуры, но не на открытые, то $\mathbf{e}_2 = 0$.

Следовательно, если воображаемых катушек нет и если все известные напряжения приложены к закрытым контурам, а все известные действующие токи — к узловым парам, то ортогональные уравнения напряжения упрощаются:

$$\begin{aligned} \mathbf{e} &= \mathbf{z}_1 \mathbf{i} + \mathbf{z}_2 \mathbf{I}, & e_m &= z_{mn} i^n + z_{mv} I^v, \\ \mathbf{E} &= \mathbf{z}_3 \mathbf{i} + \mathbf{z}_4 \mathbf{I}, & E_u &= z_{un} i^n + z_{uv} I^v. \end{aligned} \quad (16.15)$$

Переменными являются \mathbf{i} (контурные токи) и \mathbf{E} (напряжения узловых пар).

III. Если неизвестными являются контурные токи \mathbf{i}^1 и разности потенциалов узловых пар \mathbf{E}_2 , неизвестное \mathbf{i}^1 можно найти из одного первого ортогонального уравнения

$$\mathbf{z}_1 \mathbf{i}^1 = \mathbf{E}_1 + \mathbf{e}_1 - \mathbf{z}_2(\mathbf{i}^2 + \mathbf{I}^2) - \mathbf{z}_1 \mathbf{I}^1, \quad (16.16)$$

$$\mathbf{i}^1 = \mathbf{z}_1^{-1} [\mathbf{E}_1 + \mathbf{e}_1 - \mathbf{z}_2(\mathbf{i}^2 + \mathbf{I}^2)] - \mathbf{I}^1.$$

Подстановкой значения \mathbf{i}^1 во второе ортогональное уравнение находим неизвестное \mathbf{E}_2 без вычисления обратных матриц

$$\mathbf{E}_2 = \mathbf{z}_3(\mathbf{i}^1 + \mathbf{I}^1) + \mathbf{z}_4(\mathbf{i}^2 + \mathbf{I}^2) - \mathbf{e}_2. \quad (16.17)$$

Эту величину только через одни известные действующие величины \mathbf{E}_1 , \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 , \mathbf{i}^2 и \mathbf{I}^2 можно также выразить как

$$\mathbf{E}_2 = \mathbf{z}_3 \mathbf{z}_1^{-1} (\mathbf{E}_1 + \mathbf{e}_1) - \mathbf{e}_2 + (\mathbf{z}_4 - \mathbf{z}_3 \mathbf{z}_1^{-1} \mathbf{z}_2)(\mathbf{i}^2 + \mathbf{I}^2). \quad (16.18)$$

IV. Следует заметить, что, хотя число неизвестных равно числу катушек (в данном примере пяти), только матрица z_1 , обратную которой необходимо рассчитать, имеет число строк и столбцов, равное числу закрытых контуров. Никаких других обратных матриц при нахождении неизвестных рассчитывать не нужно.

Следует также заметить, что хотя для расчета контурных токов необходимо столько уравнений, сколько в сети имеется контуров, но, чтобы найти z_2 , необходимое для определения i^1 , следует все же принять во внимание наличие узловых пар.

Значит, знания z_1 (которое можно найти с помощью сингулярного тензора преобразования S , игнорируя узловые пары) недостаточно для расчета i^1 , если имеются воздействующие токи I .

В специальном случае уравнения (16.15) неизвестные находят по соотношениям

$$\begin{aligned} i &= z_1^{-1}(e - z_2 I), \\ E &= z_3 i + z_4 I, \\ E &= z_3 z_1^{-1} e + (z_4 - z_3 z_1^{-1} z_2) I. \end{aligned} \quad (16.19)$$

11. «АКТИВНЫЕ» УЗЛОВЫЕ ПАРЫ

I. Если некоторые узловые пары не имеют воздействующих на них токов I' и не обязательно знать разность потенциалов E' на них, то в расчете z можно не принимать во внимание наличие этих узловых пар и учитывать лишь столько узловых пар, сколько имеется известных I' или необходимых E' . Это происходит, если тензор импеданса z' , содержащий все оси узловых пар, получается каждый раз, когда одной из узловых пар пренебрегают. Соответствующие строку и столбец можно вычеркивать до тех пор, пока наконец z' будет иметь столько же строк и столбцов, сколько имеется контуров. Однако нельзя опустить ни одной строки или столбца, относящихся к контурной оси, поскольку при этом уничтожается соответствующая переменная.

Таким образом, для ортогональных сетей число необходимых уравнений может быть меньше числа катушек. В общем случае число полученных уравнений напряжения равно числу контуров и «активных» узловых пар. «Активной» будем называть такую узловую пару, для которой воздействующий ток I' или напряжение E' является известной величиной, в случае ее отсутствия по некоторым соображениям нужно рассчитать разность потенциалов E' .

II. Ортогональная сеть, в которой принимаются во внимание все координатные оси (следовательно, она имеет несингулярную

С), будет упоминаться как «полностью ортогональная сеть», или «полная сеть». Выражение «ортогональная сеть» используется всякий раз, когда существует два типа переменных (или два типа воздействующих величин), если не предполагается, что С несингулярная.

Следовательно, в общем случае считается, что для ортогональной сети число координатных осей равно числу контуров и «активных» узловых пар и сеть рассматривается как контурная сеть с сингулярной матрицей С.

Во многих случаях, особенно в задачах синтеза, все сети следует рассматривать как полностью ортогональные независимо от типа воздействующих величин, чтобы можно было получить для них несингулярную матрицу С. Когда каждая сеть определена несингулярным тензором преобразования С, переход от одной сети к любой другой сети при исследовании требуемого состояния является легкой рутинной процедурой и не требует применения методов проб и ошибок для нахождения диаграмм.

12. ЧИСЛОВОЙ ПРИМЕР

1. Предположим, что импедансы сети (см. рис. 16.8) имеют значения, показанные на рис. 16.11. Определенные значения указаны также для приложенных к катушкам напряжений e и воздействующих токов I . Неизвестными величинами являются контурные токи i' и напряжения узловых пар E' , а именно: два контурных тока $i^{a'}$ и $i^{b'}$ и три предварительных напряжения узловых пар $E_{p'}$, $E_{q'}$ и $E_{r'}$. Ни одна из известных величин i' или E' не является воздействующей.

Следует заметить, что, хотя сеть подает ток на две внешние нагрузки, соединенные через Z_{aa} и Z_{cc} , зажимы лишь одной из нагрузок рассматриваются как узловая пара. Другие две узловые пары нагрузки не включают. Такой выбор узловых пар может потребоваться во многих типах задач.

II. Если сеть рассматривается как чисто-контурная (см. рис. 16.9), то геометрические объекты z , e и I соответствующей примитивной сети равны

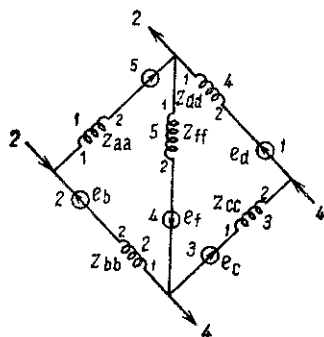


Рис. 16.11. Данная ортогональная сеть.

$$e = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline a & b & c & d & f \\ \hline 5 & 2 & 3 & 1 & 4 \\ \hline \end{array},$$

$$I = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline a & b & c & d & f \\ \hline 2 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

$$z = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline a & b & c & d & f \\ \hline 1 & & & & \\ \hline b & 2 & & & \\ \hline c & & 3 & & \\ \hline d & & & 4 & \\ \hline f & & & & 5 \\ \hline \end{array}. \quad (16.20)$$

III. Новые компоненты геометрических объектов z' , e и I' для чисто-контурной сети можно найти подстановкой компонент z в уравнение (16.7), а $e' = C_e e$ и $I' = C^{-1}I$ по уравнениям (16.6) и (16.8), откуда

$$e' = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline a' & b' & p' & q' & r' \\ \hline 11 & 6 & 6 & -1 & 2 \\ \hline \end{array}$$

$$I' = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline a' & b' & p' & q' & r' \\ \hline 2 & 0 & -2 & 4 & -4 \\ \hline \end{array}$$

$$i' = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline a' & b' & p' & q' & r' \\ \hline i^{a'} & i^{b'} & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

$$E' = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline a' & b' & p' & q' & r' \\ \hline 0 & 0 & E_{p'} & E_{q'} & E_{r'} \\ \hline \end{array}$$

$$z' = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline a' & b' & p' & q' & r' \\ \hline 8 & 5 & 7 & 2 & 2 \\ \hline b' & 5 & 12 & 5 & -3 & 0 \\ \hline c' & 7 & 5 & 7 & 3 & 2 \\ \hline d' & 2 & -3 & 2 & 5 & 2 \\ \hline f' & 2 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ \hline \end{array}. \quad (16.21)$$

IV. Чтобы получить решение для неизвестных компонент i' и E' , каждый вектор разделяется на две составляющие, а z' — на четыре составляющие по каждой контурной оси (a' , b') и осям узловых пар (p' , q' , r'):

$$i_1' = \begin{array}{|c|c|} \hline i^{a'} & i^{b'} \\ \hline \end{array} \quad i_2' = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \quad e_1' = \begin{array}{|c|c|} \hline 11 & 6 \\ \hline \end{array} \quad e_2' = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 6 & -1 & 2 \\ \hline \end{array}$$

$$E_1' = \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & 0 \\ \hline \end{array} \quad E_2' = \begin{array}{|c|c|c|} \hline E_{p'} & E_{q'} & E_{r'} \\ \hline \end{array} \quad I_1' = \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 0 \\ \hline \end{array} \quad I_2' = \begin{array}{|c|c|c|} \hline -2 & 4 & -4 \\ \hline \end{array}.$$

Из-за отсутствия воображаемых катушек все известные компоненты i' и E' (а именно $i^{2'}$ и E_2') равны нулю.

$$z_1' = \begin{array}{|c|c|} \hline 8 & 5 \\ \hline 5 & 12 \\ \hline \end{array}, \quad z_2' = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 7 & 2 & 2 \\ \hline 5 & -3 & 0 \\ \hline \end{array}, \quad (16.22)$$

$$z_3' = \begin{array}{|c|c|} \hline 7 & 5 \\ \hline 2 & -3 \\ \hline 2 & 0 \\ \hline \end{array}, \quad z_4' = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 7 & 2 & 2 \\ \hline 2 & 5 & 2 \\ \hline 2 & 2 & 2 \\ \hline \end{array}.$$

Из уравнения (16.16) найдем неизвестное $i^{1'}$ (учитывая, что E_1' и $i^{2'}$ равны нулю) :

$$i^{1'} = z_1'^{-1}(e_1' - z_2' i^{2'}) - I^{1'}.$$

Следовательно,

$$z_2' i^{2'} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline -7 \times 2 + 2 \times 4 - 2 \times 4 \\ \hline -5 \times 2 - 3 \times 4 - 0 \times 4 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline -14 \\ \hline -22 \\ \hline \end{array}, \quad z_1'^{-1} = \begin{array}{|c|c|} \hline 0,169014 & -0,070423 \\ \hline -0,070423 & 0,112676 \\ \hline \end{array}$$

$$e_1' - z_2' i^{2'} = \begin{array}{|c|} \hline 11 + 14 \\ \hline 6 + 22 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline 25 \\ \hline 28 \\ \hline \end{array}, \quad i^{1'} = \begin{array}{|c|} \hline 2,253521 - 2 \\ \hline 1,39437 - 0 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline a' & 0,253521 \\ \hline b' & 1,39437 \\ \hline \end{array} \quad (16.23)$$

Неизвестные разности потенциалов E_2' найдем из уравнения (16.17)

$$E_2' = z_3'(i^{1'} + I^{1'}) + z_4' i^{2'} - e_2':$$

$$E_2' = \begin{array}{|c|} \hline (7 \times 160 + 99 \times 5) / 71 \\ \hline (2 \times 160 - 99 \times 3) / 71 \\ \hline 2 \times 160 / 71 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline -7 \times 2 + 2 \times 4 - 2 \times 4 \\ \hline -2 \times 2 + 5 \times 4 - 2 \times 4 \\ \hline -2 \times 2 + 2 \times 4 - 2 \times 4 \\ \hline \end{array} - \begin{array}{|c|} \hline 6 \\ \hline -1 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline p' & 2,7464 \\ \hline q' & 9,3239 \\ \hline r' & -1,4930 \\ \hline \end{array} \quad (16.24)$$

V. Правильность полученных результатов можно проверить подстановкой численных значений токов и напряжений в схему сети, как показано на рис. 16.12. Они должны удовлетворять двум законам Кирхгофа: сумма всех токов в любом узле равна

нулю и сумма всех напряжений по замкнутым контурам равна нулю. Отметим, что в катушке Z_{aa} и во всех отдельных катушках протекают токи $i^a + I^a = 0,25 + 2 = 2,25$.

13. ЭТАПЫ ВЫВОДА УРАВНЕНИЯ ТОКА

I. Уравнение тока для ортогональных сетей устанавливается поэтапно аналогично тому, как это было выполнено для уравнения напряжения, с той лишь разницей, что двойственные величины взаимозаменяются.

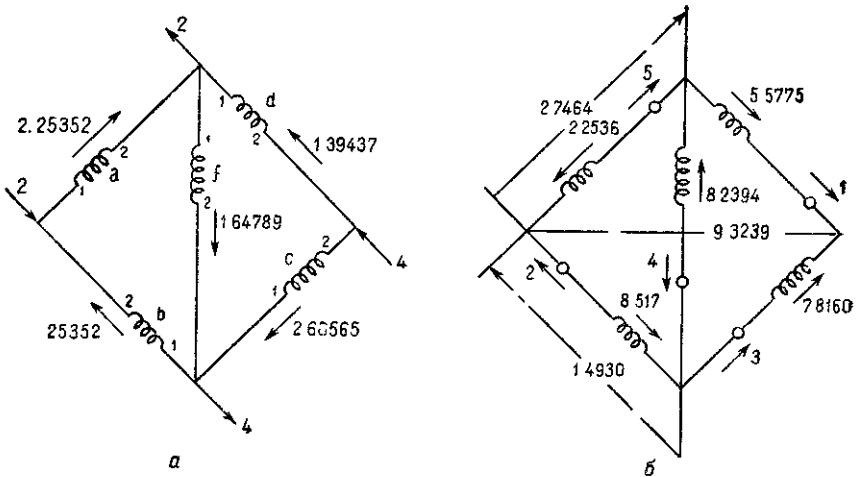


Рис. 16.12.

а — распределение токов; б — распределение напряжений.

Уравнения тока ортогональных сетей $\mathbf{i} + \mathbf{I} = \mathbf{Y}(\mathbf{E} + \mathbf{e})$ можно получить, рассматривая их как чисто-узловые сети, когда каждый контур открывается и вводятся воображаемые катушки. Для величин, значения которых известны, используются те же обозначения, что и для чисто-контурной сети (см. рис. 16.7).

Если некоторые контуры не имеют приложенных к ним напряжений \mathbf{e}' и нет необходимости знать некоторые контурные токи \mathbf{i}' , присутствие их можно не принимать во внимание. Таким образом, в общем случае число полученных уравнений токов равно числу узловых пар и «активных» контуров, если сеть рассматривается как узловая сеть с сингулярной матрицей \mathbf{C}_t^{-1} .

II. Прimitivesкая узловая сеть (рис. 16.13) также содержит четыре величины, причем \mathbf{e} , \mathbf{I} известны, а \mathbf{i} , \mathbf{E} неизвестны.

Тензор преобразования \mathbf{C}_t^{-1} этой сети находится точно так же, как и для любой другой чисто-узловой сети (гл. 14, § 6, II). Однако необходимо все воображаемые катушки (т. е. оси откры-

тых контуров и безадмиттансные ветви с известными воздействующими токами) также рассматривать как новые координатные оси. При выводе соотношения $E = C_i^{-1} E'$ безразлично, являются ли компоненты E' известными или неизвестными величинами.

III. После того как матрица $C_i^{-1} = A$ получена, Y' находят по соотношению $A_t Y A$. Известные и неизвестные компоненты переменных i' и E' и компоненты известных величин e' и I' находят точно так же, как для чисто-контурных сетей (см. § 8).

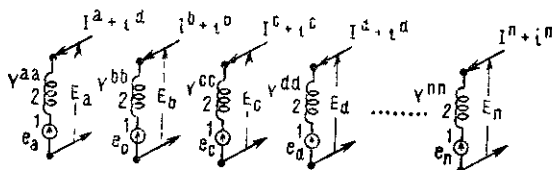


Рис. 16.13. Общая форма примитивной узловой сети.

IV. Окончательное уравнение тока имеет вид

$$i' + I' = Y'(E' + e'), \quad i^{o'} + I^{o'} = Y^{o'\beta'}(E_{\beta'} + e_{\beta'}). \quad (16.25)$$

Компоненты e' и I' являются известными величинами, а компоненты i' и E' частично известны, а частично неизвестны.

В системе уравнений число переменных i' равно числу «активных» контуров, а число переменных E' — числу узловых пар. «Ортогональные» уравнения токов для заданной сети записывают как

$$\left. \begin{aligned} i^1 + I^1 &= Y^1(e_1 + E_1) + Y^2(e_2 + E_2), \\ i^2 + I^2 &= Y^3(e_1 + E_1) + Y^4(e_2 + E_2), \end{aligned} \right\} \quad (16.26)$$

$$\left. \begin{aligned} i^m + I^m &= Y^{mn}(e_n + E_n) + Y^{mv}(e_v + E_v), \\ i^u + I^u &= Y^{un}(e_n + E_n) + Y^{uv}(e_v + E_v). \end{aligned} \right\}$$

Эти уравнения можно преобразовать различными способами.

Если в сети нет воображаемых катушек, то E_1 и i^2 равны нулю. Когда приложенное напряжение задано только в контурах, то $e_2 = 0$, а когда воздействующие токи заданы только на выбранных новых узловых парах, то $I^1 = 0$. При выполнении всех этих специальных условий ортогональные уравнения токов упрощаются:

$$\left. \begin{aligned} i &= Y^1 e + Y^2 E, & i^m &= Y^{mn} e_n + Y^{mv} E_v, \\ I &= Y^3 e + Y^4 E, & I^u &= Y^{un} e_n + Y^{uv} E_v. \end{aligned} \right\} \quad (16.27)$$

Здесь переменными являются E и i .

V. Если неизвестными являются разности потенциалов узловых пар E_2 и активные контурные токи i^1 , то неизвестную E_2 можно найти из второго уравнения как

$$Y^4 E_2 = i^2 + I^2 - Y^3(e_1 + E_1) - Y^4 e^2, \quad (16.28)$$

$$E_2 = (Y^4)^{-1} [i^2 + I^2 - Y^3(e_1 + E_1)] - e_2.$$

Подставляя значение E_2 в первое ортогональное уравнение, найдем неизвестную i без каких-либо вычислений обратных матриц

$$i^1 = Y^1 \cdot (e_1 + E_1) + Y^2(e_2 + E_2) - I^1. \quad (16.29)$$

Через известные воздействующие величины она выражается как

$$i^1 = Y^2 Y^{4-1} (i^2 + I^2) - I^1 + (Y^1 - Y^2 Y^{4-1} Y^3)(e_1 + E_1). \quad (16.30)$$

И опять здесь число строк и столбцов тензора Y^4 , обратный которого нужно рассчитать, равно числу узловых пар.

В частном случае уравнения (16.27) эти выражения упрощаются:

$$E = (Y^4)^{-1} (I - Y^3 e),$$

$$i = Y^1 e + Y^2 E, \quad (16.31)$$

$$i = Y^2 Y^{4-1} I + (Y^1 - Y^2 Y^{4-1} Y^3) e.$$

14. СВОДКА ОСНОВНЫХ ЭТАПОВ

I. Итак, если число контуров ортогональной сети меньше числа узловых пар, то (если это возможно) при выводе уравнения напряжения сеть рассматривается как контурная. Если число узловых пар меньше числа контуров, то при выводе уравнения тока сеть рассматривается как узловая. При таком рассмотрении количество вычислений обратных матриц сокращается. Конечно, это не всегда легко выполнить, иногда могут быть известны только одни импедансы сети или одни адмиттансы и т. д.

II. Определяя z ортогональной сети, следует помнить, что: 1) неактивные узловые пары можно просто игнорировать и анализировать сеть как контурную с сингулярной матрицей C ; 2) наличие контуров можно игнорировать, только применяя формулы редукции гл. 10 после того, как z' уже найдено.

III. Рассчитывая Y ортогональной сети, следует иметь в виду, что: 1) некоторые контуры можно не учитывать, анализировать сеть как узловую с сингулярной матрицей C_T^{-1} ; 2) число узловых пар можно сократить только с помощью формул редукции после того, как Y' уже рассчитано.

15. НЕСИНГУЛЯРНАЯ МАТРИЦА С ДЛЯ СЕТИ ПРОИЗВОЛЬНОГО ТИПА

I. Если несингулярная матрица преобразования C получена для полностью ортогональной сети и какая-либо ось узловой пары не является необходимой, то соответствующий столбец матрицы C можно вычеркнуть. Все оси узловых пар можно опустить, так что окончательно число столбцов матрицы C равно числу контуров. Это соответствует уже известной нам сингулярной матрице *контурной сети* (рис. 16.14). Например, если оси узловых пар p' , q' , r' (см. рис. 16.3) не являются необходимыми, то матрица преобразования уравнения (16.6) упрощается:

| | | | | | |
|-----|------|------|------|------|------|
| | a' | b' | p' | q' | r' |
| a | 1 | | | | |
| b | 1 | | 1 | 1 | 1 |
| c | | 1 | | -1 | |
| d | | -1 | | | |
| f | 1 | 1 | 1 | | |

$$(16.32)$$

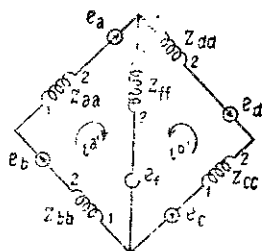


Рис. 16.14. Контурная сеть.

Оставшиеся столбцы нельзя опустить, не разрушив саму сеть.

После получения несингулярной матрицы C_t^{-1} столбцы, соответствующие контурным осям, можно вычеркивать до тех пор, пока не останется *узловая сеть* (рис. 16.15) с матрицей преобразования C_t^{-1} (см. уравнение (16.9)):

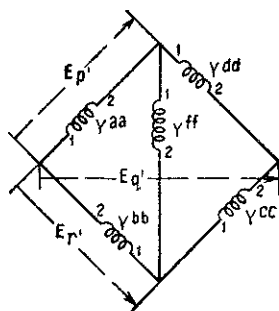


Рис. 16.15. Узловая сеть.

| | | | | | |
|-----|------|------|------|------|------|
| | a' | b' | p' | q' | r' |
| a | 1 | | -1 | | |
| b | | | | | 1 |
| c | | | -1 | 1 | |
| d | | -1 | 1 | -1 | |
| f | | | 1 | | -1 |

$$(16.33)$$

Здесь также все остальные столбцы опустить нельзя.

Итак, *следует помнить, что:* 1) при формировании z -сети существованием неактивных узловых пар можно пренебречь, од-

нако ни один из контуров опустить нельзя; 2) при формировании Y сети можно пренебречь наличием неактивных контуров, однако ни одну из узловых пар опустить нельзя.

В предельных случаях пренебрежение всеми узловыми парами приводит к Z контурной сети, а пренебрежение всеми контурами приводит к Y узловой сети.

II. Чтобы сделать более ясной физическую суть исключения из рассмотрения узловых пар и контуров, нужно помнить, что любая сингулярная (прямоугольная) матрица преобразования контурной или узловой сети, приведенная в предыдущих главах, представляет собой только часть несингулярной (квадратной) матрицы, которую можно получить для любой контурной или узловой сети простым добавлением отсутствующих ортогональных осей, если рассматривать узловые пары закрытыми или контуры открытыми.

В уравнении (16.16) показано, что для определения контурных токов i^1 достаточно найти только одну обратную матрицу от Z_1 . Итак, если нет воздействующих токов I (и i^2), то определять значения z_2 не нужно. Теперь необходимое значение z_1 можно найти из примитивной сети с помощью сингулярной матрицы S , в которой нет осей узловых пар. Таким образом, *обоснованием использования сингулярной матрицы S в анализе контурных сетей является то обстоятельство, что для нахождения контурных токов i^1 значения z_2 , z_3 и z_4 в уравнении (16.16) не требуются. Исключения составляют только z_1 . А значение Y можно найти, даже если нет осей узловых пар в S .*

Такое обоснование используется в анализе узловых сетей, для которых с помощью сингулярной матрицы S_i^{-1} нужно рассчитать только значение Y^4 .

III. Поскольку любую сеть можно рассматривать как полностью ортогональную, и если предположить, что она содержит четыре электрические величины, то можно найти компоненты тензоров импеданса или адмиттанса Z' или Y' любой сети из n катушек, исходя из известных компонент Z или Y любой другой сети из n катушек, а не из компонент для примитивных сетей. Координатная (эталонная) сеть может иметь любое количество контуров и узловых пар. Однако обе сети следует анализировать как полные.

Примитивная сеть используется как координатная сеть, поскольку легко: 1) установить компоненты ее геометрических объектов; 2) получить тензор преобразования, соотносящий новую сеть с примитивной сетью.

IV. Чтобы найти матрицу преобразования, заменяющую частную сеть 1 сетью 2, часто бывает проще ввести в качестве координатной сети примитивную сеть. Пусть: 1) S_1^0 преобразует примитивную сеть в сеть 1; 2) S_2^0 преобразует примитивную

сеть в сеть 2; 3) C_2^1 преобразует сеть 1 в сеть 2. Тогда, используя их групповое свойство, получаем

$$C_1^0 C_2^1 = C_2^0. \quad (16.34)$$

Отсюда матрица преобразования, переводящая сеть 1 в сеть 2, равна

$$C_2^1 = (C_1^0)^{-1} C_2^0, \quad (16.35)$$

где C_1^0 и C_2^0 — матрицы преобразования двух сетей, для которых используются примитивные сети в качестве координатных сетей.

V. Следует помнить, что сингулярный тензор преобразования C_2 , используемый при исключении намагничивающего тока, является также частью несингулярного тензора преобразования, который разделяет действительные токи на гипотетические «нагруженные» и «намагничивающие» токи (см. гл. 6, § 12).

16. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ДВУХ СЕТЕЙ ПРОИЗВОЛЬНОГО ТИПА

I. Чтобы показать, что сеть из n катушек можно использовать в качестве координатной сети при анализе любой другой n -катушечной сети, в качестве примера рассмотрим пятикатушечную сеть (рис. 16.16, а) (воспроизведенную с рис. 16.8), ко-

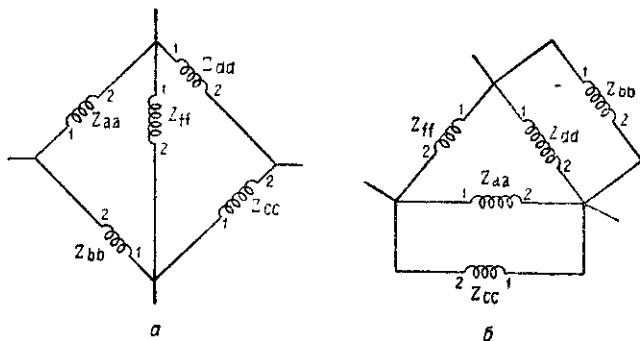


Рис. 16.16. Преобразование сетей:
а — координатная сеть; б — производная сеть.

торая содержит два контура и три узловые пары. Тензоры C и C^{-1} сети уже были получены раньше, в § 9. Предположим, что пять катушек пересоединены так, что образуют другую сеть с тремя контурами и двумя узловыми парами (рис. 16.16, б). Задача состоит в том, чтобы 1) установить C' , переводящую первую сеть во вторую; 2) с помощью C' найти e'' , I'' и z'' второй сети по e' , I' и z' первой сети (см. § 6).

Метод анализа тот же, что и в случае, когда в качестве координатной сети используется примитивная сеть.

II. Предположим, что обе сети являются пятиконтурными, а узловые пары рассматриваются как воображаемые катушки. Тогда:

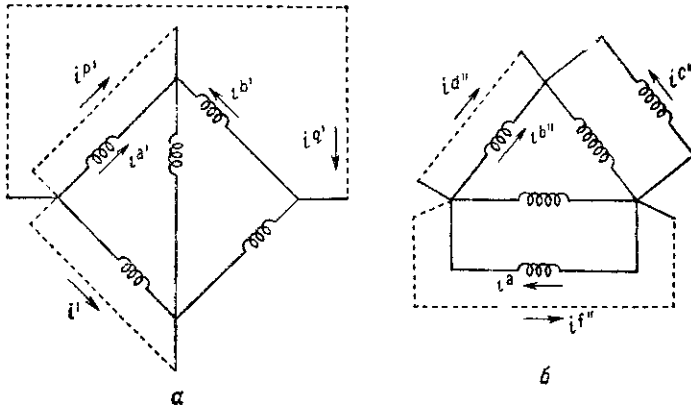


Рис. 16.17. Переход к чисто-контурной сети:
а — координатная сеть; б — производная сеть.

1. Выберем пять новых переменных i'' для новой сети, две из которых на узловых парах, а остальные в контурах (рис. 16.17). В старой сети (рис. 16.17, а) выбраны три переменные узловых пар и две контурные переменные.

2. С помощью первого закона Кирхгофа запишем токи в каждой катушке обеих сетей (рис. 16.18, а).

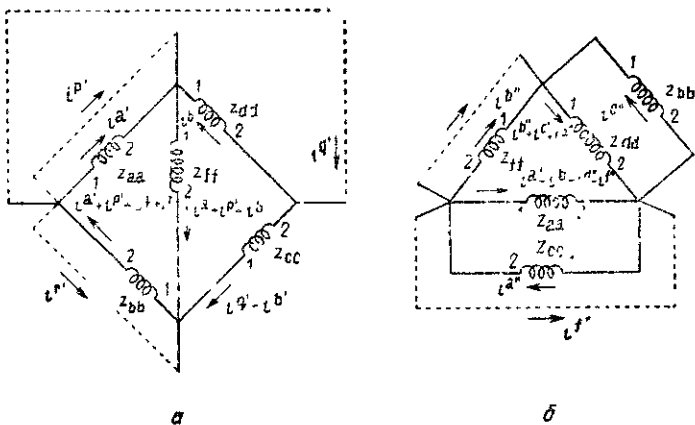


Рис. 16.18. Токи в отдельных катушках:
а — координатные сети; б — производная сеть.

3. Приравниваем старые и новые токи в каждой катушке (рис. 16.18, а, б)

$$\begin{aligned}
 i^{a'} &= i^{a''} - i^{b''} - i^{d''} - i^{f''} \\
 i^{a'} + i^{p'} - i^{q'} + i^{r'} &= i^{c''} \\
 i^{b'} - i^{q'} &= i^{a''} \\
 -i^{b'} &= i^{b''} + i^{c''} + i^{d''} \\
 i^{a'} + i^{b'} + i^{p'} &= -i^{b''}.
 \end{aligned} \tag{16.36}$$

Эту систему уравнений всегда можно преобразовать так, что в левой части каждого уравнения окажется только один старый ток:

$$\begin{aligned}
 i^{a'} = i^{a''} & \quad -i^{b''} \quad -i^{d''} \quad -i^{f''} & a' \\
 i^{b'} = & \quad -i^{b''} - i^{c''} - i^{d''} & b' \\
 i^{p'} = & -i^{a''} + i^{b''} + i^{c''} + 2i^{d''} + i^{f''} & c' = p' \\
 i^{q'} = & -i^{a''} - i^{b''} - i^{c''} - i^{d''} & q' \\
 i^{r'} = & i^{a''} + i^{b''} - i^{c''} & r'
 \end{aligned}$$

| | a'' | b'' | c'' | d'' | f'' |
|---------|-----|-----|-----|-----|-----|
| a' | 1 | -1 | 0 | -1 | -1 |
| b' | 0 | -1 | -1 | -1 | 0 |
| c' = p' | -1 | 1 | 1 | 2 | 1 |
| q' | -1 | -1 | -1 | -1 | 0 |
| r' | 1 | 1 | -1 | 0 | 0 |

(16.37)

Следует отметить наличие целого числа 2.

4. Коэффициенты при новых токах дают матрицу преобразования C' , превращающую сеть на рис. 16.18, а в сеть на рис. 16.18, б.

III. Новые компоненты тензора импеданса новой сети найдем по формуле $C'_i Z' C'$

| | a'' | b'' | c'' | d'' | f'' |
|-------------|--------------------|----------------------------|-------------------|-------------------|-----------|
| a'' | $Z_{aa} + Z_{fc}$ | $-Z_{aa} - Z_{cf}$ | 0 | $-Z_{aa}$ | $-Z_{aa}$ |
| b'' | $-Z_{aa} - Z_{fc}$ | $Z_{aa} + Z_{dd} + Z_{ff}$ | Z_{dd} | $Z_{aa} + Z_{dd}$ | Z_{aa} |
| $z'' = c''$ | 0 | Z_{dd} | $Z_{bb} + Z_{dd}$ | Z_{dd} | 0 |
| d'' | $-Z_{aa}$ | $Z_{aa} + Z_{dd}$ | Z_{dd} | $Z_{aa} + Z_{dd}$ | Z_{aa} |
| f'' | $-Z_{aa}$ | Z_{aa} | 0 | Z_{aa} | Z_{aa} |

(16.38)

Новые компоненты напряжений, действующих на катушки, равны $C_t' e' = e''$:

$$e'' = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline a'' & b'' & c'' & d'' & f'' \\ \hline e_a + e_c & -e_a + e_d - e_f & -e_b + e_d & -e_a + e_d & -e_a \\ \hline \end{array} \quad (16.39)$$

Вектор I'' можно найти, рассчитав сначала матрицу, обратную C' .

17. ПРОВЕРКА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Правильность вычислений C' , z'' , e'' и I'' сети на рис. 16.16, б можно проверить, получив их не из рис. 16.16, а, а из примитивной сети.

Матрица преобразования C'' на рис. 16.8, б (если использовать ее примитивную контурную сеть) равна

$$\begin{array}{l} i^a = i^{a''} - i^{b''} - i^{d''} - i^{f''} \\ i^b = -i^{c''} \\ i^c = i^{a''} \\ i^d = i^{b''} + i^{c''} + i^{d''} \\ i^f = -i^{b''} \end{array} \quad C'' = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline a'' & b'' & c'' & d'' & f'' \\ \hline a & 1 & -1 & & -1 & -1 \\ \hline b & & & -1 & & \\ \hline c & 1 & & & & \\ \hline d & & 1 & 1 & 1 & \\ \hline f & & -1 & & & \\ \hline \end{array} \quad (16.40)$$

Эта матрица C'' должна быть произведением матриц C (16.6) и C' (16.37), т. е. $CC' = C''$:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & & & & \\ \hline 1 & & 1 & 1 & 1 \\ \hline & 1 & & -1 & \\ \hline & -1 & & & \\ \hline 1 & 1 & 1 & & \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & -1 & & -1 & -1 \\ \hline & -1 & -1 & -1 & \\ \hline -1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ \hline -1 & -1 & -1 & -1 & \\ \hline 1 & 1 & -1 & & \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & -1 & & -1 & -1 \\ \hline & & -1 & & \\ \hline 1 & & & & \\ \hline & 1 & 1 & 1 & \\ \hline & -1 & & & \\ \hline \end{array} \quad (16.41)$$

Матрицы (16.40) и (16.41) одинаковы. Матрица импедансов имеет вид

$$C_i z C^i = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & a'' & b'' & c'' & d'' & f'' \\ a'' & Z_{ca} + Z_{cc} & -Z_{aa} - Z_{cf} & 0 & -Z_{aa} & -Z_{aa} \\ b'' & -Z_{aa} - Z_{fc} & Z_{aa} + Z_{dd} + Z_{ff} & Z_{dd} & Z_{aa} + Z_{dd} & Z_{aa} \\ c'' & 0 & Z_{dd} & Z_{bb} + Z_{dd} & Z_{dd} & 0 \\ d'' & -Z_{aa} & Z_{aa} + Z_{dd} & Z_{dd} & Z_{aa} + Z_{dd} & Z_{aa} \\ f'' & -Z_{aa} & Z_{aa} & 0 & Z_{aa} & Z_{aa} \end{array} \end{array} \quad (16.42)$$

Эта матрица соответствует уравнению (16.38). Итак, $C_i'' e = e''$:

$$e'' = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & a'' & b'' & c'' & d'' & f'' \\ e'' & e_a + e_c & -e_a + e_d - e_f & -e_b + e_d & -e_a + e_d & -e_a \end{array} \end{array} \quad (16.43)$$

Эта 1-матрица также соответствует уравнению (16.39).

Следовательно, нет никакой разницы в том, какая сеть из n катушек используется в качестве координатной сети для расчета любой сети из n катушек. Конечные n -матрицы и уравнения одинаково независимы от выбора исходной координатной сети.

18. ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ВСЕХ n -КАТУШЕЧНЫХ СЕТЕЙ

I. Таким образом, было показано, что можно найти несингулярную матрицу преобразования S_α^a , для любых двух n -катушечных сетей независимо от того, сколько контуров, узловых пар и подсетей имеет каждая из них. Это следует из того, что связанные с каждой сетью шесть n -матриц, а именно $e_{(\alpha)}$, $E_{(\alpha)}$, $i_{(\alpha)}$, $I_{(\alpha)}$, $z_{(\alpha)(\beta)}$ и $Y_{(\alpha)(\beta)}$, не являются независимыми одна от другой, а представляют различные совокупности компонент шести сущностей или «геометрических объектов», а именно e_α , E_α , i^α , I^α , $z_{\alpha\beta}$ и $Y^{\alpha\beta}$, по различным координатным системам.

Такое большое разнообразие n -матриц связано вместе в шесть понятий посредством группы несингулярных матриц преобразования S_α^a , благодаря тому факту, что каждую из них можно найти из любой другой исключительно с помощью некоторой частной матрицы S_α^a , не используя никакой другой n -матрицы. Компоненты всех матриц преобразования этой группы содержат только целые числа. Эту группу можно назвать «группой соединения».

Подобным образом различные уравнения поведения всех n -катушечных сетей не являются независимыми и могут быть пре-

образованы друг в друга с помощью C_a^z . Следовательно, если различные типы уравнений однажды получены для примитивной сети (или для любой другой сети), то аналогичные уравнения можно получить для всех асимметричных, активных сетей с помощью рутинных преобразований.

Следует, однако, подчеркнуть, что между сетями, имеющими различное число катушек, группы матриц преобразования все же не были получены. Такие группы будут введены в связи с задачей синтеза сетей.

II. Подведем итог. При исследовании характеристик, уравнений или поведения сетей нет необходимости рассматривать только одну частную сеть, часто можно одновременно рассматривать аналогичные сети, устанавливая инвариантные уравнения. Это возможно только благодаря существованию группы несингулярных матриц преобразования C_a^z , с помощью которых можно привести уравнения одной сети из n катушек к уравнениям любой другой сети из n катушек. Матрицы преобразования можно получить между любыми n -катушечными сетями из группы (группы соединений), поскольку они удовлетворяют четырем групповым условиям (гл. 11, § 3), а именно:

1) произведение любых двух матриц C также является элементом группы, т. е. если C_2^1 преобразует сеть 1 в сеть 2 и C_3^2 преобразует сеть 2 в сеть 3, то их произведение $C_2^1 C_3^2 = C_3^1$ преобразует сеть 1 в сеть 3; 2) справедлив ассоциативный закон: $(C_2^1 C_3^2) C_4^3 = C_2^1 (C_3^2 C_4^3)$, т. е. несколько последовательных преобразований можно выполнить при любых группировках; 3) сеть остается неизменной при преобразовании ее посредством единичной матрицы I ; 4) каждая матрица преобразования C имеет обратную C^{-1} , так что уравнения ортогональной сети можно получить вновь из уравнений новой сети с помощью C^{-1} .

Следует помнить, что существование этой группы матриц C возможно потому, что с каждой сетью ассоциируются четыре электромагнитные величины (e, E, i и I), а не две (e, i или E, I).

ВЗАИМОСВЯЗАННЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ И МАГНИТНЫЕ СЕТИ

1. МАГНИТНЫЕ И ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ СЕТИ

I. При установлении уравнений поведения сетей, скажем $\epsilon = z_i$, не уделялось внимания компонентам различных геометрических объектов. Было принято, что они могут быть константами, функциями, линейными операторами и пр.

Исследуем теперь подробно определенную специальную форму z и Y . Пусть ее матрица будет симметричной, т. е. сеть неподвижная и симметричная, и пусть сеть содержит только сосредоточенные сопротивления, индуктивности и эластансы¹⁾. Задача настоящей главы состоит в том, чтобы выразить тензоры z и Y этих специальных сетей в терминах более фундаментальных тензоров.

II. При изучении таких сетей выделим три типа непрерывных путей, каждый из которых вносит свой вклад в конструктивные параметры, определяющие значение z и Y . Эти пути следующие: 1) описываемые электрическими зарядами; назовем их «электрической сетью»; 2) описываемые линиями магнитного потока, называемые «магнитной сетью»; 3) описываемые линиями диэлектрического потока, называемые «диэлектрической сетью».

Каждая из этих трех сетей построена из «катушек» и «узлов» (1- и 0-ячеек). (Во вращающихся электрических машинах эти три типа сетей обобщаются, включая также электрические, магнитные и диэлектрические «слои» (2-ячейки). Имеются также механические сети, принимаемые во внимание при анализе вращающихся машин или других электромеханических систем.)

III. Теперь будем считать, что электрическая сеть содержит только взаимосоединенные непрерывные медные проводники, которые не имеют других конструктивных параметров, кроме сопротивлений $r_{\alpha\beta}$, представляющих собой сопротивления протекающему в сети потоку электрических зарядов. Индуктивности $l_{\alpha\beta}$ катушек обусловлены линиями магнитного потока, идущими совершенно другими путями и не по направлению проводника,

¹⁾ Эластанс — величина, обратная емкости (см. гл. 2). (Прим. ред.).

как для электрических зарядов. Эти пути лежат в окрестности непрерывного медного проводника. Подобным образом эластансы $s_{\alpha\beta}$, обусловленные линиями электростатического потока, локализованы частично в конденсаторах (в разрывах, вводимых в проводники). Конденсаторы не будут считаться частью электрической сети, поскольку электрические заряды не проходят через разрывы между обкладками.

IV. Следовательно, когда предполагается, что тензор импеданса $z_{\alpha\beta}$ в сети из катушек содержит другие конструктивные параметры, помимо сопротивления $r_{\alpha\beta}$, тогда молчаливо предполагается, что существуют другие сети, взаимосвязанные с основной электрической сетью, а именно, магнитные и диэлектрические, присутствие которых, однако, замаскировано тем, что отдельные катушки искусственно наделяются собственными и взаимными индуктивностями и эластансами.

Однако компоненты $z_{\alpha\beta}$, а именно собственные и взаимные индуктивности и эластансы отдельных катушек, можно изменить при изменении способа соединения различных членов, составляющих магнитные и диэлектрические сети, не изменяя взаимосоединения самой электрической сети. Таким образом, при установлении конструктивных параметров $z_{\alpha\beta}$ электрической сети необходимо изучить взаимосвязанные магнитные и диэлектрические сети.

В то же время магнитные и диэлектрические сети исследуются в электротехнике, но без взаимосвязи с электрическими сетями. Однако их инженерное значение как независимых сетей гораздо меньше, чем электрических. Их анализ как независимых сетей был дан в предыдущих главах.

2. УРАВНЕНИЯ СОСТОЯНИЯ ИЗОЛИРОВАННЫХ КОНТУРНЫХ СЕТЕЙ

I. Если рассматривать изолированные электрические, магнитные и электростатические поля, то соотношения между интенсивностями полей (воздействующая величина) и результирующими плотностями потоков (величина отклика) вдоль выбранного направления в каждой точке неподвижной однородной среды определяются так:

$$1) \text{ в электрическом поле } e = ri \text{ или } i = ge; \quad (17.1)$$

$$2) \text{ в магнитном поле } h = \rho b, \text{ или } b = \rho h; \quad (17.2)$$

$$3) \text{ в электростатическом поле } e = sd, \text{ или } d = ce. \quad (17.3)$$

Различные символы определены в табл. 17.1.

II. В неподвижной неоднородной среде интенсивность поля, действующая в одном направлении, порождает потоки, которые имеют составляющие по другим направлениям. Поэтому коэффициент пропорциональности двух величин не может быть скаляром. Рассматривая воздействующие и ответные величины

| Символы | |
|--|--|
| электрические | вещественные |
| e — напряженность электрического поля | r — удельное сопротивление |
| h — напряженность магнитного поля | ρ — удельное магнитное сопротивление; |
| ε — напряженность электростатического поля | s — эластанс — удельная «электростатическая жесткость» ¹⁾ |
| i — плотность тока | g — удельная проводимость |
| b — плотность магнитного потока | μ — магнитная проницаемость |
| d — плотность электростатического потока | c — диэлектрическая постоянная |

¹⁾ Величина, обратная удельной емкости.

В каждой точке как векторы, параметры среды вместо скаляров будем считать тензорами валентности два, а приведенные выше соотношения для неоднородной среды примут вид

$$1) e_{\alpha} = r_{\alpha\beta} i^{\beta} \quad \text{или} \quad i^{\alpha} = g^{\alpha\beta} e_{\beta}; \quad (17.4)$$

$$2) h_{\alpha} = \rho^{\alpha\beta} b_{\beta}, \quad b_{\alpha} = \mu_{\alpha\beta} h^{\beta}; \quad (17.5)$$

$$3) e_{\alpha} = s_{\alpha\beta} d^{\beta}, \quad d^{\alpha} = c^{\alpha\beta} e_{\beta}. \quad (17.6)$$

Позиции индексов следуют из соображений, которые приведены ниже.

III. При изучении сетей вместо интенсивности поля в точке рассматривается интеграл интенсивности по линии между двумя точками (узловая пара) или по замкнутой цепи (контур). Точно так же вместо плотности потока в точке рассматривается ее поверхностный интеграл по площади поперечного сечения катушки.

Сеть с несколькими контурами и узловыми парами рассматривается как неоднородное поле, в котором предполагается только конечное число направлений (во всех других направлениях поле равно нулю).

В такой интерпретации уравнения (17.4)—(17.6) остаются неизменными и представляют уравнения поведения контурных сетей трех типов. Каждый тип при этом является изолированной сетью.

IV. Вначале изучим изолированные магнитные и диэлектрические сети, а затем эффекты взаимоотношения их с электрической сетью.

3. МАГНИТНЫЕ СЕТИ

I. Магнитная сеть состоит из магнитных проводников (обычно железо и воздух) и их соединений (рис. 17.1, а).

Аналогичная электрическая сеть показана на рис. 17.1, б.

Такие магнитные сети играют важную роль в многообмоточных трансформаторах, вращающихся машинах, измерительных приборах и т. д. Конструктивными параметрами их являются

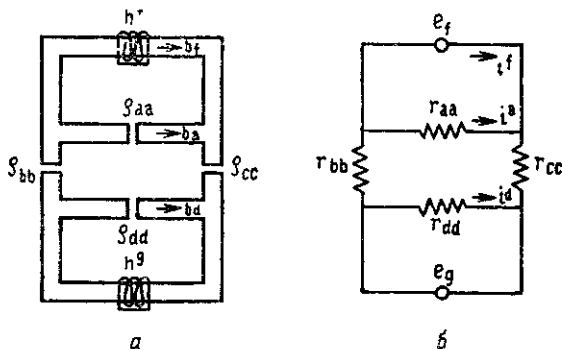


Рис. 17.1.

а — магнитная сеть; б — ее электрический аналог.

магнитные сопротивления (*релактансы*) ρ^{aa} , ρ^{bb} различных магнитных компонент или их проницаемости μ_{aa} , μ_{bb} и т. д. Между отдельными членами нет взаимных релактансов ρ^{ab} или проницаемостей μ_{ab} точно так же, как нет взаимных сопротивлений между отдельными катушками электрической сети.

Магнитную сеть можно также рассматривать как контурную, узловую или ортогональную в зависимости от точки зрения.

II. Наложенные электромагнитные величины бывают двух видов:

1) *силы намагничивания* h^a обычно создаются токами, протекающими в катушках, намотанных вокруг магнитных путей в изолированных точках (магнитодвижущие силы — МДС); постоянные магниты также имеют МДС, однако здесь они не рассматриваются;

2) *плотность магнитного потока* b_a . Каждая из этих двух типов величин может быть и *приложенной* и *ответной* величиной.

III. По своему *физическому* действию МДС аналогична напряжению, а плотность потока — току. В частности:

1) *в контурной сети* МДС h приложены в разных точках, а плотность потока b возникает в замкнутых контурах как отклик, подобно приложенному e и отклику i ;

2) *в узловой сети* плотность магнитного потока B приложена в узловых парах, и в ответ в узловых парах возникают МДС H

(или, скорее, разности магнитных потенциалов) подобно приложенному I и ответу E .

Из-за определенной взаимозависимости, существующей между векторами электрических и магнитных сетей во взаимосвязанной системе (как показано в § 8, III), магнитные потоки, связывающие различные катушки, представляются ковариантным вектором b_α , тогда как физически подобный ток является контравариантным вектором i^α . Подобным образом МДС катушки является контравариантным вектором h^α , в то время как физически подобный вектор напряжения — ковариантным e_α .

В соответствии с этим изменением тензор релактанса — $\rho^{\alpha\beta}$ (физически подобный $r_{\alpha\beta}$), а тензор проницаемости — $\mu_{\alpha\beta}$ (физически подобный $\gamma^{\alpha\beta}$).

Различные уравнения поведения подобны уравнениям электрических сетей, за исключением того, что позиции индексов оказались измененными, т. е.

1) для контурной сети уравнение МДС имеет вид

$$\mathbf{h} = \rho \mathbf{b}, \quad h^m = \rho^{mn} b_n; \quad (17.7)$$

2) для узловой сети уравнение потока

$$\mathbf{V} = \mu \mathbf{H}, \quad V_\alpha = \mu_{\alpha\beta} H^\beta; \quad (17.8)$$

3) для ортогональной сети уравнения МДС и потока

$$\mathbf{H} + \mathbf{h} = \rho (\mathbf{b} + \mathbf{B}), \quad H^\alpha + h^\alpha = \rho^{\alpha\beta} (b_\beta + B_\beta), \quad (17.9)$$

$$\mathbf{b} + \mathbf{B} = \mu (\mathbf{H} + \mathbf{h}), \quad b_\alpha + B_\alpha = \mu_{\alpha\beta} (H^\beta + h^\beta). \quad (17.10)$$

4. ПРИМЕР МАГНИТНОЙ КОНТУРНОЙ ЦЕПИ

1. Пусть дана сеть (рис. 17.2), в которой электрическая сеть взаимосвязана с магнитной и в которой состояние электрической сети известно.

Поскольку ковариантные и контравариантные индексы физически подобных величин взаимозаменяемы, то между электрическими и магнитными сетями существует такая же двойственность, как между контурными и узловыми сетями.

Во всех рассматривавшихся до сих пор задачах электрических сетей предполагалось, что собственные и взаимные индуктивности отдельных катушек (z примитивной сети) известны. В настоящем примере предполагается, однако, что известны только релактансы $\rho^{\alpha\beta}$ отдельных элементов магнитной

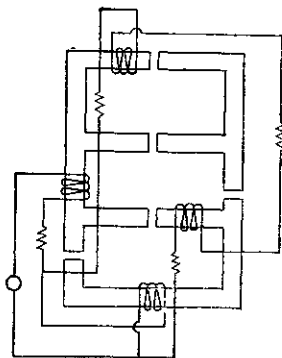


Рис. 17.2. Взаимосвязанная электрическая и магнитная сеть.

сети. Следовательно, чтобы найти поведение электрической сети, необходимо удалить все электрические соединения и найти собственные и взаимные индуктивности (проницаемости) отдельных катушек (показанных еще раз на рис. 17.3, *a*) из отдельных релактансов магнитных членов. Подобные случаи встречаются во всех многообмоточных трансформаторах.

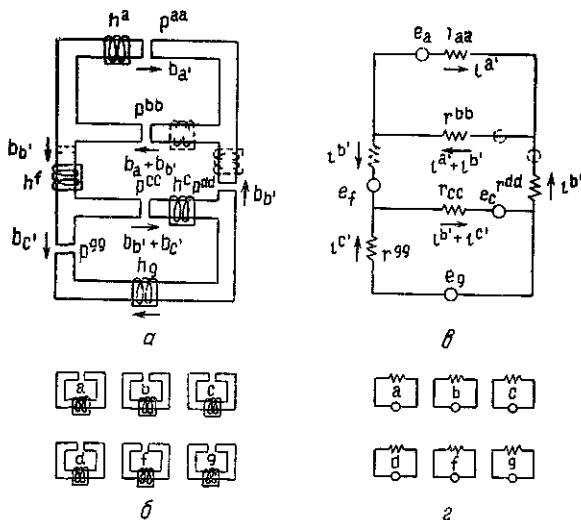


Рис. 17.3.

a — магнитная сеть, *б* — примитивная магнитная сеть; *в* — эквивалентная электрическая сеть, *г* — примитивная электрическая сеть.

Проблема нахождения собственных и взаимных проницаемостей (или индуктивностей) отдельных катушек, входящих в магнитную сеть, аналогична нахождению собственных и взаимных адмиттансов отдельных катушек электрической сети *после того*, как катушки соединены в несколько контуров (см. гл. 5, § 8). Итак, вычисление идет в два этапа:

1) прежде всего находят собственные и взаимные релактансы магнитных *контуров*, образуемых отдельными элементарными магнитными составляющими;

2) затем находят собственные и взаимные проницаемости отдельных *магнитных членов* (или катушек, навитых вокруг них). В этом параграфе дается первый этап вычислений, второй этап дан в § 9.

II. Электрическая сеть, подобная магнитной сети (рис. 17.3, *a*), показана на рис. 17.3, *в*. Их анализ ведется параллельно. Примитивная магнитная контурная сеть показана на рис. 17.3, *б*.

Ее тензор релактансов равен

$$\rho = \rho^{mn} = \begin{array}{c|cccccc} n & a & b & c & d & f & g \\ \hline m & a & \rho^{aa} & & & & \\ & b & & \rho^{bb} & & & \\ & c & & & \rho^{cc} & & \\ & d & & & & \rho^{dd} & \\ & f & & & & & 0 \\ & g & & & & & \rho^{gg} \end{array} \quad (17.11)$$

Компоненты этого тензора, представляющие релактансы различных путей, обычно вычисляют с помощью методов *теории поля*.

Вместо релактансов $\rho^{aa} \dots$, конечно, можно использовать *проницаемости* $\mu_{aa} \dots$, где $\rho^{ad} = 1/\mu_{aa}$.

В магнитной сети с каждой МДС ассоциируется отдельный магнитный релактанс, в том числе и равный нулю, а с каждым *релактансом* ассоциируется МДС, величина которой также может быть равна нулю. Как следствие, примитивная магнитная контурная сеть содержит равное число электрических и магнитных элементов. Введение дополнительных катушек и релактансов аналогично введению добавочного напряжения e_a вместе с импедансом Z_{aa} и дополнительному импедансу с напряжением, т. е. в примитивной электрической сети каждому новому члену соответствует дополнительный импеданс Z_{aa} и связанное с ним дополнительное напряжение e_a .

Приложенная МДС представлена вектором

$$\mathbf{h} = \mathbf{h}^m = \begin{array}{c|cccccc} m & a & b & c & d & f & g \\ \hline & h^a & 0 & h^c & 0 & h^f & h^g \end{array} \quad (17.12)$$

III. Поскольку имеется *три* контура, любые три магнитных потока могут считаться переменными (см. рис. 17.3, *a*). Там же показаны потоки, проходящие через каждое магнитное сопротивление.

Уравнение преобразования $b_m = C_m^{m'} b_{m'}$ или $\mathbf{b} = \mathbf{C}^{-1} \mathbf{b}'$ получается *приравнованием старых и новых потоков, проходящих через каждое магнитное сопротивление* ρ^{aa} , ρ^{bb} как

$$\begin{aligned}
 b_a &= b_{a'} \\
 b_b &= b_{a'} + b_{b'} \\
 b_c &= b_{b'} + b_{c'} \\
 b_d &= b_{b'} \\
 b_f &= b_{b'} \\
 b_g &= b_{c'}
 \end{aligned}
 \quad
 C_t^{-1'} = A =
 \begin{array}{c|ccc}
 & a' & b' & c' \\
 \hline
 a & 1 & & \\
 \hline
 b & 1 & 1 & \\
 \hline
 c & & 1 & 1 \\
 \hline
 d & & 1 & \\
 \hline
 f & & 1 & \\
 \hline
 g & & & 1
 \end{array}
 \quad (17.13)$$

Коэффициенты при новых токах образуют C_t^{-1} . Если C_t^{-1} заменить A , то можно использовать все формулы, выведенные для контурной электрической сети и для магнитной контурной сети простой заменой в них (в прямом обозначении) C на A .

IV. Новые компоненты тензора релактанса ρ находят посредством $A_t \rho A$, а компоненты h' — посредством $A_t h$ как

$$\rho A =
 \begin{array}{c|ccc}
 & a' & b' & c' \\
 \hline
 a & \rho^{aa} & & \\
 \hline
 b & \rho^{bb} & \rho^{bb} & \\
 \hline
 c & & \rho^{cc} & \rho^{cc} \\
 \hline
 d & & \rho^{dd} & \\
 \hline
 f & & & \\
 \hline
 g & & & \rho^{gg}
 \end{array},
 \quad (17.14)$$

$$\rho^{m'n'} =
 \begin{array}{c|ccc}
 & n' & a & b' & c' \\
 \hline
 a' & \rho^{aa} + \rho^{bb} & \rho^{bb} & 0 \\
 \hline
 b' & \rho^{bb} & \rho^{bb} + \rho^{cc} + \rho^{dd} & \rho^{cc} \\
 \hline
 c' & 0 & \rho^{cc} & \rho^{cc} + \rho^{gg}
 \end{array},
 \quad (17.15)$$

$$h' = h^{m'} =
 \begin{array}{c|ccc}
 & m' & a' & b' & c' \\
 \hline
 & h^a & h^c + h^f & h^c + h^g
 \end{array}
 \quad (17.16)$$

V. Если приложенные МДС предполагаются известными, то магнитные потоки в контурах находят с помощью $b' = \rho'^{-1} h' = \mu' h'$.

Если три компоненты b' вычислены, то потоки через отдельные релактансы можно найти как $b = Ab'$. Падение магнитного потенциала (МДС) на каждом отдельном релактансе находят из $h_c = \rho Ab'$, где ρA уже было вычислено в уравнении (17.14), так что

$$h_c =
 \begin{array}{c|ccccc}
 & a & b & c & d & f & g \\
 \hline
 h_c = & \rho^{aa} b_{a'} & \rho^{bb} (b_{a'} + b_{b'}) & \rho^{cc} (b_{b'} + b_{c'}) & \rho^{dd} b_{b'} & 0 & \rho^{gg} b_{c'}
 \end{array}
 \quad (17.17)$$

5. ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ СЕТИ

I. Диэлектрические сети состоят из электрических проводников и изоляторов (скажем, медь и воздух), образующих пути для линий электростатического потока. Эти пути играют важную роль во всех электрических устройствах, использующих высокое напряжение.

Конструктивными параметрами здесь являются *эластансы* S_{aa}, S_{bb}, \dots различных элементов или обратные величины — *емкости* C^{aa}, C^{bb} и т. д. Предполагается, что они сконцентрированы в воздушном зазоре между проводниками. Они всегда вычисляются методами теории поля. Снова не существует взаимных емкостей C^{ab} между отдельными членами.

Диэлектрическая сеть может быть контурной, узловой и ортогональной.

II. Наложеными электромагнитными величинами являются: 1) *электродвижущие силы* e_a , т. е. те самые силы, которые ускоряют электрические заряды в электрической сети; 2) *линии электростатического потока* d^a (также называемые «смещением»).

Вместо того, чтобы говорить, что электрический заряд $+q$ помещен в точке A , а заряд $-q$ в точке B , скажем, что d линий электрического потока входят в точку A и выходят из точки B , т. е. что d линий электрического потока протекают от A к B по путям, которые соединяют A и B . Если это требуется, электрические заряды q и электростатический поток d могут быть в дальнейшем взаимозаменяемы. Каждый из них может быть воздействующей или ответной величиной.

III. Существует двойственность между диэлектрической и магнитной сетью, но не существует двойственности между диэлектрической и электрической сетью. Это значит, что линии d^a электрического потока (или заряда q^a) и физически эквивалентный ток i^a являются контравариантными векторами.

Различие между электрической и диэлектрической сетью заключается в способе, по которому в их уравнения поведения входит время.

IV. Различные уравнения поведения для трех типов диэлектрических сетей аналогичны соответствующим уравнениям электрической сети, т. е.

$$\text{контурное } \mathbf{e} = \mathbf{s}d, \quad e_m = s_{mn}d^n; \quad (17.18)$$

$$\text{узловое } \mathbf{D} = \mathbf{C}\mathbf{E}, \quad D^u = C^{uv}E_v; \quad (17.19)$$

$$\text{ортогональное } \begin{cases} \mathbf{E} + \mathbf{e} = \mathbf{s}(\mathbf{d} + \mathbf{D}), & E_\alpha + e_\alpha = s_{\alpha\beta}(d^\beta + D^\beta); \\ (\mathbf{d} + \mathbf{D}) = \mathbf{C}(\mathbf{E} + \mathbf{e}), & d^\alpha + D^\alpha = C^{\alpha\beta}(E_\beta + e_\beta). \end{cases} \quad (17.20)$$

В этих уравнениях \mathbf{d} может быть заменено \mathbf{q} .

V. В инженерных задачах магнитные сети обычно появляются как контурные, в то время как диэлектрические сети обычно появляются как узловые.

Электрический заряд, возникающий в точке, эквивалентен линиям электрического потока, входящим в эту точку, как если бы это была узловая точка нескольких диэлектрических составляющих. Можно сказать, что *магнитные потоки, появляющиеся в технических задачах (создаваемые электрическими токами), рассматриваются как замкнутые линии, в то время как линии электростатического потока рассматриваются как открытые линии.* (Они начинаются у положительного заряда и заканчиваются у отрицательного.) Линии магнитного потока образуют замкнутые контуры, в то время как линии диэлектрического потока — открытые контуры.

Подобным образом в магнитных сетях *приложенные МДС* обычно концентрируются в точке, *последовательно* соединенной с каждым магнитным членом; с другой стороны, в диэлектрических сетях приложенные *разности потенциалов* обычно появляются в диэлектрических членах, но не в последовательном соединении с ними.

6. ПРИМЕР УЗЛОВОЙ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ СЕТИ

1. Пусть задана узловая диэлектрическая сеть (рис. 17.4, а), состоящая из четырех проводников *A, B, C* и *D* (скажем, четырех электродов лампы или трех проводников линии передачи и заземления и т. д.). Имеется три контура и три узловые пары

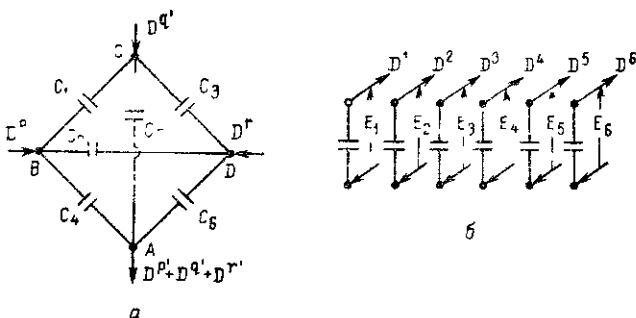


Рис. 17.4.

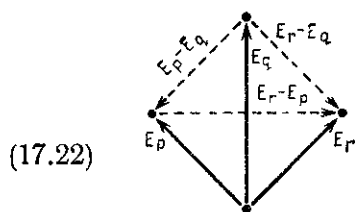
а — диэлектрическая узловая сеть; б — ее примитивная узловая сеть.

A—D, A—C, A—B (узел *A* может быть заземленным). Пусть линии потока входят в узлы и выходят через узел *A* (т. е. пусть предполагается наличие зарядов на проводниках *B, C* и *D*, если рассматривать проводник *A* как заземление).

Разность потенциалов между любыми двумя проводниками и должна быть исследована.

II. Тензор емкостей примитивной узловой сети на рис. 17.4, б

| | | | | | | |
|------------|---|-------|-------|-------|-------|-------|
| v | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| u | 1 | C^1 | | | | |
| | 2 | | C^2 | | | |
| | 3 | | | C^3 | | |
| $C^{uv} =$ | 4 | | | | C^4 | |
| | 5 | | | | | C^5 |
| | 6 | | | | | |
| | | | | | | C^6 |



(17.22)

Рис. 17.5. Разности потенциалов.

На рис. 17.5 показаны три выбранные разности потенциалов $E_{p'}$, $E_{q'}$ и $E_{r'}$, а также разности потенциалов, возникающие на каждом элементе.

Приравнявая старые и новые разности потенциалов, возникающие на каждом элементе, имеем

$$\begin{aligned}
 E_1 &= E_{p'} - E_{q'} \\
 E_2 &= -E_{p'} + E_{r'} \\
 E_3 &= -E_{q'} + E_{r'} \\
 E_4 &= E_{p'} \\
 E_5 &= E_{q'} \\
 E_6 &= E_{r'}
 \end{aligned}
 \quad C_u^{u'} = A =$$

| | | | |
|------|------|------|------|
| u' | p' | q' | r' |
| 1 | 1 | -1 | |
| 2 | -1 | | 1 |
| 3 | | -1 | 1 |
| 4 | 1 | | |
| 5 | | 1 | |
| 6 | | | 1 |

(17.23)

III. Тензор емкостей найдем с помощью $A_t CA = C'$

| | | | |
|-----------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| v' | p' | q' | r' |
| $u' p'$ | $C_1 + C_2 + C_4$ | $-C_1$ | $-C_2$ |
| $C^{u'v'} = q'$ | $-C_1$ | $C_1 + C_3 + C_5$ | $-C_3$ |
| r' | $-C_2$ | $-C_3$ | $C_2 + C_3 + C_6$ |

(17.24)

В уравнениях потока $D^{u'} = C^{u'v'} E_{v'}$, линии потока $D^{u'}$ в узловых парах задаются как

$$D^{u'} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline u' & p' & q' & r' \\ \hline D^{p'} & D^{q'} & D^{r'} & \\ \hline \end{array}$$

(17.25)

(нет необходимости находить их как $D^{u'} = D^u C_u^{u'}$).

Неизвестные разности потенциалов на любой узловой паре находят как $E_{v'} = S_{v'u'} D^{u'}$, т. е. нахождением обратной матрицы от $C_{u'v'}$.

$$S_{u'v'} = \begin{array}{c|ccc} v' & p' & q' & r' \\ \hline u' p' & S_{pp} & S_{pq} & S_{pr} \\ \hline q' & S_{pq} & S_{qq} & S_{qr} \\ \hline r' & S_{pr} & S_{qr} & S_{rr} \end{array} \quad (17.26)$$

IV. Умножение **S** на **A** по ASA_t дает собственные и взаимные эластансы различных конденсаторов S'_{uv} , которые взаимосвязаны как

| <i>v</i> | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|-------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|--------------------|-------------------|-------------------|
| <i>u</i> | | | | | | |
| 1 | $S_{pp} - 2S_{pq} + S_{qq}$ | $S_{pr} - S_{qr} - S_{pp} + S_{pq}$ | $S_{pr} - S_{qr} + S_{qq} - S_{pq}$ | $-S_{pp} - S_{pq}$ | $S_{pq} - S_{qq}$ | $S_{pr} - S_{qr}$ |
| 2 | $S_{pr} - S_{pp} - S_{qr} + S_{pq}$ | $S_{rr} - 2S_{pr} + S_{pp}$ | $S_{rr} - S_{pr} - S_{qr} + S_{pq}$ | $S_{pr} - S_{pp}$ | $S_{qr} - S_{pq}$ | $S_{rr} - S_{pr}$ |
| 3 | $S_{pr} - S_{pp} - S_{qr} + S_{pq}$ | $S_{rr} - S_{qr} - S_{pr} + S_{pq}$ | $S_{rr} - 2S_{qr} + S_{qq}$ | $S_{pr} - S_{pp}$ | $S_{qr} - S_{qq}$ | $S_{rr} - S_{qr}$ |
| $S'_{uv} =$ | | | | | | |
| 4 | $S_{pp} - S_{pq}$ | $S_{pr} - S_{pp}$ | $S_{pr} - S_{pq}$ | S_{pp} | S_{pq} | S_{pr} |
| 5 | $S_{pq} - S_{qq}$ | $S_{qr} - S_{pq}$ | $S_{qr} - S_{qq}$ | S_{pq} | S_{qq} | S_{qr} |
| 6 | $S_{pr} - S_{qr}$ | $S_{rr} - S_{pr}$ | $S_{rr} - S_{qr}$ | S_{pr} | S_{qr} | S_{rr} |

(17.27)

так что $E_u^* = S'_{uv} D^v$, где D^v — воздействующий поток (заряды) через каждый конденсатор; E_u^* — разность потенциалов, возникающая между пластинами каждого конденсатора.

7. ВЗАИМОСВЯЗАННЫЕ СЕТИ

I. В большинстве проблем три типа сетей, а именно электрические, магнитные и диэлектрические, не изолированы одна от другой, а некоторым образом взаимосвязаны. В исследовании сетей можно рассмотреть два следующих типа взаимоотношений:

1) электрическая и диэлектрическая сети *взаимосвязаны* так, что между ними существует *физический* контакт (рис. 17.6);

2) магнитная сеть взаимосцеплена как с электрической, так и с диэлектрической сетью, так что между ними *нет физического контакта* (рис. 17.7).

II. Следует подчеркнуть, что эти два случая являются совершенно противоположными, *предельными* и между ними есть много других возможностей. Например, путь в магнитном железе может представлять собой часть электрической сети, но при этом возникает новая проблема. В каждом случае должно быть сделано различие между 1) *материальными* частицами, образу-

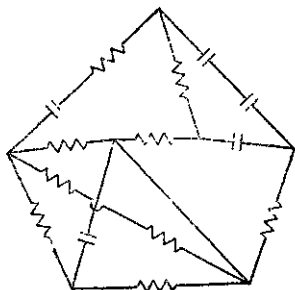


Рис. 17.6. Взаимосвязанные электрические и диэлектрические сети.

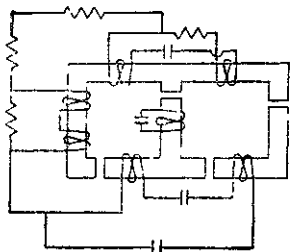


Рис. 17.7. Магнитная сеть, сцепленная с электрической и диэлектрической сетью.

щими подлежащую основную сеть (*материальную*); 2) наложенными на эту сеть *электромагнитными величинами*, которые также образуют сеть (*геометрическую*).

Таким образом, сеть, образованная наложенными электромагнитными величинами (сеть «цепей» — *chains*), отличается от сети, которая образована основной материальной сетью (сетью «ячеек» — *cells*). В неподвижных симметричных сетях эти два типа сетей полностью совпадают, но этого не происходит во вращающихся машинах.

Следует заметить, что в диэлектрической сети путь электрических зарядов является *разрывным*, поскольку предполагается, что заряды не проходят между двумя пластинами конденсатора. Таким образом, в диэлектрической сети оба пути (*материальный и геометрический*) имеют разрывы для электрических зарядов. Следовательно, в нашем случае можно предположить, что диэлектрическая сеть есть то же самое, что и электрическая сеть, имеющая разрывы.

Однако магнитная сеть принципиально отличается от электрической, поскольку в ней не протекают электрические заряды. Она является *двойственной* сетью для диэлектрической сети. Теоретически можно допустить существование магнитной сети, по которой протекают магнитные заряды, производящие рассеяние тепла, являющейся *двойственной* электрической сети. Однако такого магнитного явления пока наблюдать не удавалось.

8. ВЗАИМОСВЯЗАННЫЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ЯВЛЕНИЯ

I. Так же, как связаны между собой три типа физических сетей, связаны и наложенные на них электромагнитные явления (e_α и i^α , h^α и b_α , e_α и d^α). Эти взаимосвязи даются уравнениями электромагнитного поля Максвелла. Взаимосоединение между магнитными и диэлектрическими сетями в настоящей работе не рассматривается.

II. Рассматривая лишь один элементарный контур каждого типа сети, когда электрическая цепь N раз обвита вокруг магнитного сердечника, имеем:

$$N\dot{b} = \varphi \text{ — потокосцепление (вектор-потенциал),} \quad (17.28)$$

$$Ni = m \text{ — магнитодвижущая сила.} \quad (17.29)$$

В терминах этих новых величин отношения между тремя типами контуров будут

$$1) \text{ магнитный} \rightarrow \text{электрический } d\varphi/dt = e, \quad (17.30)$$

$$2) \text{ электрический} \rightarrow \text{магнитный } m = h, \quad (17.31)$$

$$3) \text{ диэлектрический} \rightarrow \text{электрический } dq/dt = i. \quad (17.32)$$

III. Когда несколько диэлектрических и электрических контуров соединены с магнитными контурами, количество взаимосвязей представлено тензором \mathbf{N} , содержащим число витков в каждой катушке, а приведенные выше соотношения для контурных сетей принимают следующий вид:

$$1) \text{ магнитная} \rightarrow \text{электрическая } d\varphi/dt = \mathbf{e}, \quad d\varphi_m/dt = e_m; \quad (17.33)$$

$$2) \text{ электрическая} \rightarrow \text{магнитная } \mathbf{m} = \mathbf{h}, \quad m^m = h^m; \quad (17.34)$$

$$3) \text{ диэлектрическая} \rightarrow \text{электрическая } d\mathbf{q}/dt = \mathbf{i}, \quad dq^m/dt = i^m, \quad (17.35)$$

где

$$\varphi = \mathbf{N}_i \mathbf{b}, \quad \varphi_m = N_m^f b_f; \quad (17.36)$$

$$\mathbf{m} = \mathbf{N}i, \quad m^m = N_n^m i^n. \quad (17.37)$$

IV. Вектор потокосцепления φ можно выразить через вектор тока \mathbf{i} :

$$\varphi = \mathbf{N}_i \mathbf{b} = \mathbf{N}_i \mu \mathbf{h} = \mathbf{N}_i \mu \mathbf{m} = \mathbf{N}_i \mu \mathbf{N}i. \quad (17.38)$$

Если тензор индуктивности определяется через тензор проницаемости как

$$\mathbf{l} = \mathbf{N}_i \mu \mathbf{N}, \quad l_{mn} = \mu_{pq} N_m^p N_n^q, \quad (17.39)$$

то вектор потокосцепления в терминах тензора индуктивности

$$\varphi = \mathbf{l}i, \quad \varphi_m = l_{mn} i^n. \quad (17.40)$$

Обратное соотношение может быть записано как

$$\mathbf{i} = \mathbf{k}\varphi, \quad i^m = k^{mn} \varphi_n. \quad (17.41)$$

9. СОБСТВЕННЫЕ И ВЗАИМНЫЕ ИНДУКТИВНОСТИ

I. Знание собственных и взаимных проницаемостей μ' магнитных контуров, вычисленных в § 4, является лишь первым шагом в расчете *l* отдельных катушек. Необходимо сделать шаг дальше и вычислить собственные и взаимные проницаемости отдельных магнитных членов, которые с помощью уравнения (17.44) позволяют найти *собственные и взаимные индуктивности отдельных катушек*, связывающих отдельные магнитные элементы.

Переход от *контурной* проницаемости к проницаемости катушек точно такой же, как переход от *контурных* адмиттансов к адмиттансам отдельных катушек (см. гл. 5, § 8). Это значит, что если контурная проницаемость μ' была вычислена с помощью обращения ρ' , то проницаемость катушек подобна уравнению (5.30):

$$\mu_c = C_t^{-1} \mu' C^{-1}, \quad \mu'_{mn} = \mu_{m'n'} C_m^{m'} C_n^{n'}; \quad (17.42)$$

$$\mu_c = A \mu' A_t. \quad (17.43)$$

II. Если известны только собственные и взаимные релактансы ρ примитивной магнитной сети, то *после соединения магнитной контурной сети посредством* $C_t^{-1} = A$ собственные и взаимные проницаемости отдельных катушек магнитной сети по уравнению (5.29) (если электрические цепи еще не взаимосоединены) будут

$$\mu_c = A (A_t \rho A)^{-1} A_t; \quad \mu_c = C_t^{-1} (C^{-1} \rho C_t^{-1})^{-1} C^{-1}. \quad (17.44)$$

Если отдельные катушки имеют различное число витков, представляемых диагональным тензором числа витков $N = N_m \rho$, то собственные и взаимные индуктивности I можно найти из проницаемостей μ_c с помощью уравнения (17.39).

III. Следовательно, *собственные и взаимные индуктивности* I примитивной электрической контурной сети находят из релактансов ρ *примитивной магнитной контурной сети* как

$$I = N_t [A (A_t \rho A)^{-1} A_t] N, \quad (17.45)$$

где $A = C_t^{-1}$ показывает способ взаимосоединения магнитной сети, а N — число витков катушек примитивной электрической контурной сети. В I имеется столько строк и столбцов, сколько катушек.

Когда некоторые элементы релактансов не имеют катушек, то соответствующие строчки и столбцы I автоматически исключаются при использовании N .

IV. При рассмотрении примера (см. рис. 17.3, а) тензор реактанса уже был вычислен в уравнении (17.15). Его обращение (тензор проницаемости) есть

$$\mu' = \begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|c|} \hline & a' & b' & c' \\ \hline a' & \mu_{aa} & \mu_{ab} & \mu_{ac} \\ \hline b' & \mu_{ab} & \mu_{bb} & \mu_{bc} \\ \hline c' & \mu_{ac} & \mu_{bc} & \mu_{cc} \\ \hline \end{array} \end{array} \quad (17.46)$$

Дважды последовательно умножая его на тензор преобразования $C_t^{-1} = A$ (данный в уравнении (17.13)), находим тензор проницаемости отдельных катушек как $A\mu'A_t$, т. е.

$$\mu_c = \begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline & a & b & c & d & f & g \\ \hline a & \mu_{aa} & \mu_{aa} + \mu_{ab} & \mu_{ab} + \mu_{ac} & \mu_{ab} & \mu_{ab} & \mu_{ac} \\ \hline b & \mu_{aa} + \mu_{ab} & \mu_{aa} + 2\mu_{ab} + \mu_{bb} & \mu_{ab} + \mu_{bb} + \mu_{ac} + \mu_{bc} & \mu_{ab} + \mu_{bb} & \mu_{ab} + \mu_{bb} & \mu_{ac} + \mu_{bc} \\ \hline c & \mu_{ab} + \mu_{ac} & \mu_{ab} + \mu_{ac} + \mu_{bb} + \mu_{bc} & \mu_{bb} + 2\mu_{bc} + \mu_{cc} & \mu_{bb} + \mu_{bc} & \mu_{bb} + \mu_{bc} & \mu_{bc} + \mu_{cc} \\ \hline d & \mu_{ab} & \mu_{ab} + \mu_{bb} & \mu_{bb} + \mu_{bc} & \mu_{bb} & \mu_{bb} & \mu_{bc} \\ \hline f & \mu_{ab} & \mu_{ab} + \mu_{bb} & \mu_{bb} + \mu_{bc} & \mu_{bb} & \mu_{bb} & \mu_{bc} \\ \hline g & \mu_{ac} & \mu_{ac} + \mu_{bc} & \mu_{bc} + \mu_{cc} & \mu_{bc} & \mu_{bc} & \mu_{cc} \\ \hline \end{array} \end{array} \quad (17.47)$$

Тензор отношения числа витков равен

$$N = \begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline & a & b & c & d & f & g \\ \hline a & n_a & & & & & \\ \hline b & & & & & & \\ \hline c & & & n_c & & & \\ \hline d & & & & & & \\ \hline f & & & & & n_f & \\ \hline g & & & & & & n_g \\ \hline \end{array} \end{array} \quad (17.48)$$

Следовательно, собственные и взаимные индуктивности четырех обмоток находят из $N_t \mu_c N =$

| | a | c | f | g |
|---|---------------------------------|---|---------------------------------|---------------------------------|
| a | $(n_a)^2 \mu_{aa}$ | $n_a n_c (\mu_{ab} + \mu_{ac})$ | $n_a n_f \mu_{ab}$ | $n_a n_g \mu_{ac}$ |
| c | $n_a n_c (\mu_{ab} + \mu_{ac})$ | $n_c^2 (\mu_{bb} + 2\mu_{bc} + \mu_{cc})$ | $n_c n_f (\mu_{bb} + \mu_{bc})$ | $n_c n_g (\mu_{bc} + \mu_{cc})$ |
| f | $n_a n_f \mu_{ab}$ | $n_c n_f (\mu_{bb} + \mu_{bc})$ | $(n_f)^2 \mu_{bb}$ | $n_f n_g \mu_{bc}$ |
| g | $n_a n_g \mu_{ac}$ | $n_c n_g (\mu_{bc} + \mu_{cc})$ | $n_f n_g \mu_{bc}$ | $(n_g)^2 \mu_{cc}$ |

(17.49)

10. БАЗОВЫЕ И ПРОИЗВОДНЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ

I. В уравнениях электрической сети были введены два типа переменных: 1) контравариантная переменная $i = i^m$, используемая в контурных сетях; 2) ковариантная переменная $E = E_u$, используемая в узловых сетях.

Когда электрическую сеть связывают магнитные и диэлектрические сети, вводится два дополнительных множества переменных: 1) контравариантные переменные $q = q^m$, представляющие электрические заряды в контурных сетях; 2) ковариантные переменные $\Phi = \Phi_u$, представляющие потокосцепление в узловых сетях.

II. Первичные переменные i и E можно получить из дополнительных переменных q и Φ с помощью дифференцирования как $i^m = dq^m/dt$ и $E_u = d\Phi_u/dt$; следовательно, q^m и Φ_u можно назвать «базовыми переменными», а i^m и E_u — «производными переменными».

Нужно заметить, что базовой переменной является не Φ_u , а φ_u — понятие, отличное от Φ_u , поскольку одно из них относится к контурной сети, а другое — к узловой сети. Подобным образом другая базовая переменная есть q^m , а не Q^m .

Уравнения поведения сетей можно выразить через эти четыре типа переменных в различных комбинациях.

11. ДВОЙСТВЕННЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

I. В гл. 14, § 1 было показано, что понятия «контур» и «узловая пара» двойственны, и все величины, ассоциируемые с ними, также двойственны друг другу. В предыдущих главах были введены следующие двойственные тензоры:

- 1) приложенные величины $e = e_{\bar{m}} \rightarrow I = I^u$;
- 2) ответные величины $i = i^{\bar{m}} \rightarrow E = E_u$;
- 3) константы сети $z = z_{\bar{m}n} \rightarrow Y = Y^{\bar{u}v}$;
- 4) тензоры преобразования $C = C_{\alpha'}^{\alpha} \rightarrow C_t^{\alpha'-1} = C_{\alpha}^{\bar{\alpha}'}$.

II. При наличии взаимосвязанных электрических, магнитных и диэлектрических сетей появляются следующие дополнительные двойственные тензоры:

$$5) \text{ ответные величины } \begin{cases} \varphi = \varphi_m \rightarrow \mathbf{Q} = \mathbf{Q}^u, \\ \mathbf{q} = \mathbf{q}^m \rightarrow \Phi = \Phi_u; \end{cases}$$

$$6) \text{ электрические константы } \mathbf{r} = \mathbf{r}_{mn} \rightarrow \mathbf{G} = \mathbf{G}^{uv};$$

$$7) \text{ магнитные константы } \mathbf{l} = \mathbf{l}_{mn} \rightarrow \mathbf{K} = \mathbf{K}^{uv};$$

$$8) \text{ диэлектрические константы } \mathbf{s} = \mathbf{s}_{mn} \rightarrow \mathbf{C} = \mathbf{C}^{uv};$$

Существуют также следующие двойственные скаляры:

1) кинетическая энергия = $T \rightarrow V'$ — потенциальная энергия;

2) скорость излучения тепла = $D \rightarrow D'$ — скорости излучения тепла;

3) входная мощность = $P \rightarrow P'$ — входная мощность.

Если «воздействующий» ток \mathbf{I} интерпретировать как «отводящий» (ток, снабжающий внешнюю нагрузку), то P' — выходная мощность.

12. УРАВНЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЯ

I. Уравнение напряжения $\mathbf{e} = \mathbf{z}\mathbf{i}$ во взаимосоединенной электрической и диэлектрической контурной сети, связанной с магнитной сетью, согласно уравнениям (17.14), (17.18), (17.33) принимает вид

$$\mathbf{e} = \mathbf{r}\mathbf{i} + d\varphi/dt + \mathbf{s}\mathbf{q}, \quad e_m = r_{mn}i^n + d\varphi_m/dt + s_{mn}q^n. \quad (17.50)$$

Электрическая сеть вносит $\mathbf{r}\mathbf{i}$, взаимосвязанная магнитная сеть — $d\varphi/dt$, а взаимосоединенная диэлектрическая сеть — $\mathbf{s}\mathbf{q}$. По закону Кирхгофа напряжения суммируются вдоль контура.

В терминах производной переменной i (поскольку $\varphi = \int \mathbf{i}$ и $\mathbf{q} = \int \mathbf{i} dt$) уравнение напряжения в контурной сети

$$\mathbf{e} = \mathbf{r}\mathbf{i} + \mathbf{l} \frac{d\mathbf{i}}{dt} + \mathbf{s} \int \mathbf{i} dt, \quad e_m = r_{mn}i^n + l_{mn} \frac{di^n}{dt} + s_{mn} \int i^n dt; \quad (17.51)$$

$$\mathbf{e} = \mathbf{r}\mathbf{i} + \mathbf{l}p\mathbf{i} + (\mathbf{s}/p)\mathbf{i}, \quad e_m = r_{mn}i^n + l_{mnp}i^n + (s_{mn}/p)i^n. \quad (17.52)$$

II. Следовательно, тензор импеданса \mathbf{z} для неподвижных симметричных сетей принимает следующую специальную форму:

$$\mathbf{z} = \mathbf{r} + \mathbf{l}d/dt + \mathbf{s} \int dt, \quad z_{mn} = r_{mn} + l_{mnd}/dt + s_{mn} \int dt, \quad (17.53)$$

$$\mathbf{z} = \mathbf{r} + \mathbf{l}p + \mathbf{s}/p, \quad z_{mn} = r_{mn} + l_{mnp} + s_{mn}/p. \quad (17.54)$$

Электрическая сеть вносит \mathbf{r} , магнитная сеть — $\mathbf{l}p$, а диэлектрическая — s/p .

III. В терминах базовой переменной \mathbf{q} получаем уравнение

$$\mathbf{e} = \mathbf{l} \frac{d^2 \mathbf{q}}{dt^2} + \mathbf{r} \frac{d\mathbf{q}}{dt} + \mathbf{s}\mathbf{q}, \quad e_m = l_{mn} \frac{d^2 q^n}{dt^2} + r_{mn} \frac{dq^n}{dt} + s_{mn} q^n. \quad (17.55)$$

Оно представляет столько дифференциальных уравнений второго порядка, сколько имеется контуров.

Это уравнение подобно уравнению напряжения отдельной катушки, имеющей сопротивление r , индуктивность l и эластанс s :

$$e = l \frac{d^2 q}{dt^2} + r \frac{dq}{dt} + sq, \quad (17.56)$$

за исключением того, что согласно первому обобщающему постулату каждый скаляр заменяется соответствующей n -матрицей, а каждая n -матрица — геометрическим объектом валентности n .

IV. В ортогональной сети появляется также \mathbf{E} и \mathbf{I} , так что уравнение напряжения в ортогональной сети (с использованием спинорных индексов) принимает вид

$$\mathbf{E} + \mathbf{e} = (\mathbf{r} + \mathbf{l}p + \mathbf{s}/p)(\mathbf{i} + \mathbf{I}), \\ E_{\alpha}^{-} + e_{\alpha}^{-} = (r_{\alpha\beta}^{-} + l_{\alpha\beta}^{-}p + s_{\alpha\beta}^{-}/p)(i^{\beta} + I^{\beta}). \quad (17.57)$$

Уравнения этого параграфа, используемые для формализованного анализа сетей, представляют собой точную форму уравнений динамики Лагранжа с контравариантными переменными (см. § 16).

13. УРАВНЕНИЕ ТОКА

I. Уравнение тока $\mathbf{I} = \mathbf{Y}\mathbf{E}$ взаимосвязанной электрической и диэлектрической узловой сети, соединенной с магнитной сетью, согласно уравнениям (17.4), (17.35) и (17.41) будет

$$\mathbf{I} = \mathbf{G}\mathbf{E} + \frac{d\mathbf{Q}}{dt} + \mathbf{K}\Phi, \quad I^u = G^{uv}E_v + \frac{dQ^u}{dt} + K^{uv}\Phi_v. \quad (17.58)$$

Электрическая сеть дает $\mathbf{G}\mathbf{E}$, взаимосвязанная магнитная сеть — $\mathbf{K}\Phi$, а взаимосвязанная диэлектрическая сеть — $d\mathbf{Q}/dt$. По закону Кирхгофа токи суммируются в узлах.

В терминах производной переменной E (поскольку $Q = CE$ и $\Phi = \int E dt$) уравнение тока в узловой сети следующее:

$$I = GE + C \frac{dE}{dt} + K \int E dt, \quad I^u = G^{uv} E_v + C^{uv} \frac{dE_v}{dt} + K^{uv} \int E_v dt; \quad (17.59)$$

$$I = GE + CpE + (K/p)E, \quad I^u = G^{uv} E_v + C^{uv} p E_v + (K^{uv}/p) E_v. \quad (17.60)$$

II. Следовательно, тензор адмиттанса Y принимает для неподвижных симметричных сетей следующую специальную форму:

$$Y = G + C \frac{d}{dt} + K \int dt \quad Y^{uv} = G^{uv} + C^{uv} \frac{d}{dt} + K^{uv} \int dt, \quad (17.61)$$

$$Y = G + Cp + K/p, \quad Y^{uv} = G^{uv} + C^{uv} p + K^{uv}/p. \quad (17.62)$$

Сама электрическая цепь дает G , диэлектрическая цепь — Cp , магнитная — K/p .

III. В терминах базовой переменной Φ уравнение принимает вид

$$I = C \frac{d^2 \Phi}{dt^2} + G \frac{d\Phi}{dt} + K\Phi, \quad I^u = C^{uv} \frac{d^2 \Phi_v}{dt^2} + G^{uv} \frac{d\Phi_v}{dt} + K^{uv} \Phi_v \quad (17.63)$$

и представляет столько дифференциальных уравнений второго порядка, сколько имеется узловых пар.

Это уравнение подобно уравнению для отдельной катушки

$$I = C \frac{d^2 \Phi}{dt^2} + G \frac{d\Phi}{dt} + K\Phi, \quad (17.64)$$

в котором каждый скаляр заменяется соответствующим геометрическим объектом.

IV. В ортогональной сети появляются также e и i , так что уравнение тока в этой сети (используются спинорные индексы) есть

$$i + I = (G + Cp + K/p)(E + e), \\ i^\alpha + I^\alpha = (G^{\alpha\bar{\beta}} + C^{\alpha\bar{\beta}} p + K^{\alpha\bar{\beta}}/p)(E_{\bar{\beta}} + e_{\bar{\beta}}). \quad (17.65)$$

Уравнения этого параграфа, используемые при нормальном анализе сетей, представляют собой точную форму уравнений динамики Лагранжа с ковариантными переменными (см. § 16).

14. УРАВНЕНИЕ МОЩНОСТИ

I. Если уравнение напряжения умножить на \mathbf{l} (см. (17.52)), то каждый член будет представлять собой мощность:

$$\mathbf{ie} = \mathbf{iri} + \mathbf{ilpi} + \mathbf{is/pi},$$

$$e_m i^m = r_{mn} i^m i^n + l_{mn} (p i^n) i^m + s_{mn} ((1/pe) i^n) i^m.$$

Поскольку $\mathbf{i} = d\mathbf{q}/dt = p\mathbf{q}$, то уравнение мощности есть также

$$\mathbf{ie} = \mathbf{iri} + p \left(\frac{1}{2} \mathbf{ili} \right) + p \left(\frac{1}{2} \mathbf{qsq} \right), \quad (17.66)$$

$$e_m i^m = r_{mn} i^m i^n + p \left(\frac{1}{2} l_{mn} i^m i^n \right) + p \left(\frac{1}{2} s_{mn} q^m q^n \right), \quad (17.67)$$

где $\mathbf{ie} = P$ — полная мощность, поступающая в электрическую контурную сеть; $\mathbf{iri} = D$ — скорость рассеяния тепла в электрической сети $\mathbf{ili}/2 = T$ — кинетическая энергия, запасенная в магнитной сети; $\mathbf{qsq}/2 = V$ — потенциальная энергия, запасенная в диэлектрической сети.

Следовательно, уравнение мощности контурной сети есть

$$P = D + dT/dt + dV/dt. \quad (17.68)$$

II. Умножая уравнение тока (17.60) на \mathbf{E} , получаем

$$\mathbf{EI} = \mathbf{EGE} + \mathbf{ECP} + \mathbf{EK/pE}, \quad (17.69)$$

$$E_u I^u = G^{uv} E_u E_v + C^{uv} (p E_v) E_u + K^{uv} ((1/p) E_v) E_u.$$

Поскольку $\mathbf{E} = d\Phi/dt = p\Phi$, то уравнение мощности

$$\mathbf{EI} = \mathbf{EGE} + p \left(\frac{1}{2} \mathbf{ECE} \right) + p \left(\frac{1}{2} \mathbf{ФКФ} \right),$$

$$E_u I^u = G^{uv} E_u E_v + p \left(\frac{1}{2} C^{uv} E_u E_v \right) + p \left(\frac{1}{2} K^{uv} \Phi_u \Phi_v \right), \quad (17.70)$$

где $\mathbf{EI} = P'$ — полная мощность, поступающая в узловую электрическую сеть; $\mathbf{EGE} = D'$ — скорость рассеяния тепла электрической сетью; $\mathbf{ECE}/2 = V'$ — потенциальная энергия, запасенная в диэлектрической сети; $\mathbf{ФКФ}/2 = T'$ — кинетическая энергия, запасенная в магнитной сети. Через P' , D' , V' , T' уравнение мощности узловой сети записывается так:

$$P' = D' + \frac{dT'}{dt} + \frac{dV'}{dt}. \quad (17.71)$$

15. КВАДРАТИЧНЫЕ И ЭРМИТОВЫ ФОРМЫ

I. Различные выражения для мощности и энергии

$$\text{iri} = D \quad \left| \quad \text{EGE} = D' \quad \left| \quad r_{mn} i^m j^n = D \quad \left| \quad G^{uv} E_u E_v = D', \quad (17.72)\right.\right.$$

$$\text{ih} = 2T \quad \left| \quad \Phi K \Phi = 2T' \quad \left| \quad l_{mn} i^m j^n = 2T \quad \left| \quad K^{uv} \Phi_u \Phi_v = 2T', \quad (17.73)\right.\right.$$

$$\text{qsq} = 2V \quad \left| \quad \text{ECE} = 2V' \quad \left| \quad s_{mn} q^m q^n = 2V \quad \left| \quad C^{uv} E_u E_v = 2V' \quad (17.74)\right.\right.$$

являются *квадратичными* формами. С другой стороны, полная входная мощность $\text{ie} = P$ и $\text{EI} = P'$ является *линейной* формой.

Когда компоненты — комплексные числа, то соответствующие квадратичные формы заменяются билинейными:

$$\text{iri}^* = D \quad \left| \quad \text{E}^* \text{GE} = D' \quad \left| \quad r_{mn} i^{\bar{m}} j^n = D \quad \left| \quad G^{u\bar{v}} E_u E_{\bar{v}} = D', \quad (17.75)\right.\right.$$

$$\text{ih}^* = 2T \quad \left| \quad \Phi^* K \Phi = 2T' \quad \left| \quad l_{mn} i^{\bar{m}} j^n = 2T \quad \left| \quad K^{u\bar{v}} \Phi_u \Phi_{\bar{v}} = 2T', \quad (17.76)\right.\right.$$

$$\text{qsq}^* = 2V \quad \left| \quad \text{E}^* \text{CE} = 2V' \quad \left| \quad s_{mn} q^{\bar{m}} q^n = 2V \quad \left| \quad C^{u\bar{v}} E_u E_{\bar{v}} = 2V', \quad (17.77)\right.\right.$$

т. е. берутся сопряженные с соответствующих переменных.

Поскольку компоненты \mathbf{r} , \mathbf{l} и другие являются действительными числами, $\mathbf{r} = \mathbf{r}^*$ и т. д. Из-за этого свойства коэффициентов шести билинейных форм последние называются далее «*эрмитовыми формами*». Значение эрмитовой формы (скаляра) всегда *действительное*, а не комплексное число.

Когда любой тензор преобразования \mathbf{C} в этой книге используется для неподвижных симметричных сетей, *все эти шесть квадратичных (или эрмитовых) форм остаются инвариантными при всех преобразованиях, так же как и две линейные формы (инварианты мощности)*.

II. Нужно подчеркнуть, что *предположение об инвариантности входной мощности является более общим, чем предположение об инвариантности различных квадратичных форм, поскольку в асимметричных сетях в общем случае не существует квадратичных форм, их \mathbf{z} или \mathbf{Y} — асимметричные тензоры, но линейная форма существует*.

16. ДВОЙСТВЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ЛАГРАНЖА

I. Уравнения (17.52) и (17.60), имеющие *точный* вид уравнений Лагранжа, используемые в изучении сетей, можно привести к *исходной основополагающей* форме, которую им дал Лагранж, заменив выражения, содержащие тензоры валентности два \mathbf{r} , \mathbf{l} и другие эквивалентными выражениями, содержащими векторы и скаляры. Эти исходные основополагающие уравнения не являются, однако, лучшей формой для стандартных расчетов большого разнообразия систем.

Возьмем уравнения напряжения (17.52) и произведем следующую замену (помня, что матрицы \mathbf{r} , \mathbf{l} и \mathbf{s} — симметричные матрицы во всех системах координат и не являются функциями переменных и времени): $\mathbf{r}\mathbf{i} = \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{r}\mathbf{i}\mathbf{i}}{\partial \mathbf{i}} = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{i}}$.

$$\begin{aligned} \text{Здесь } F &= \frac{1}{2} \mathbf{r}\mathbf{i}\mathbf{i} = D_1/2 - \text{функция диссипации; } \mathbf{l}\mathbf{p}\mathbf{i} = p\mathbf{l}\mathbf{i} = \\ &= p \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{l}\mathbf{i}\mathbf{i}}{\partial \mathbf{i}} \right) = p \frac{\partial T}{\partial \mathbf{i}}; \quad \mathbf{s} = \mathbf{s}\mathbf{q} = \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{s}\mathbf{q}\mathbf{q}}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}}. \end{aligned}$$

В терминах этих скаляров и векторов уравнение напряжения (17.52) принимает вид

$$\mathbf{e} = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{i}}} - \frac{\partial (-V)}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial F}{\partial \mathbf{i}}, \quad e_m = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{i}^m} - \frac{\partial (-V)}{\partial q^m} + \frac{\partial F}{\partial i^m}. \quad (17.78)$$

Эта форма уравнения напряжения, содержащего скаляры T , V , F есть частный случай уравнений движения Лагранжа, выраженный в терминах двух контравариантных переменных q^m и i^m .

II. Подобным образом пусть в уравнении тока (17.60) будут сделаны следующие преобразования:

$\mathbf{G}\mathbf{E} = \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{G}\mathbf{E}\mathbf{E}}{\partial \mathbf{E}} = \frac{\partial F'}{\partial \mathbf{E}}$; здесь $F' = \frac{1}{2} \mathbf{G}\mathbf{E}\mathbf{E} = D'/2$ — двойственная диссипативная функция;

$$Cp\mathbf{E} = pC\mathbf{E} = p \left(\frac{1}{2} \frac{\partial C\mathbf{E}\mathbf{E}}{\partial \mathbf{E}} \right) = p \frac{\partial V'}{\partial \mathbf{E}};$$

$$\mathbf{K}_j p\mathbf{E} = \mathbf{K}\Phi = \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{K}\Phi\Phi}{\partial \Phi} = \frac{\partial T'}{\partial \Phi}.$$

В терминах этих скаляров и векторов уравнение тока (17.60) принимает вид

$$\begin{aligned} \mathbf{I} &= \frac{d}{dt} \frac{\partial V'}{\partial \mathbf{E}} - \frac{\partial (-T')}{\partial \Phi} + \frac{\partial F'}{\partial \mathbf{E}}, \\ I^u &= \frac{d}{dt} \frac{\partial V'}{\partial E_u} - \frac{\partial (-T')}{\partial \Phi_u} + \frac{\partial F'}{\partial E_u}. \end{aligned} \quad (17.79)$$

Эта форма уравнения тока — частная форма уравнений движения Лагранжа, выраженная в терминах двух ковариантных переменных Φ_u и E_u .

III. Двойственные уравнения движения Лагранжа можно представить в более симметричной форме определением

$$\text{функции Лагранжа} \quad L = T - V; \quad (17.80)$$

$$\text{двойственной функции Лагранжа} \quad L' = V' - T'; \quad (17.81)$$

В частности, в терминах контравариантных переменных

$$L = (\text{ili} - \text{qsq})/2, \quad L = (l_{mn}i^m i^n - s_{mn}q^m q^n)/2 \quad (17.82)$$

и в терминах ковариантных переменных

$$L' = (\text{ESE} - \Phi\text{K}\Phi)/2, \quad L' = (C^{uv}E_u E_v - K^{uv}\Phi_u \Phi_v)/2. \quad (17.83)$$

В терминах функций Лагранжа L и L' двойственные уравнения движения принимают вид

$$e = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial i} - \frac{\partial L}{\partial q} + \frac{\partial F}{\partial i}, \quad e_m = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial i^m} - \frac{\partial L}{\partial q^m} + \frac{\partial F}{\partial i^m}; \quad (17.84)$$

$$I = \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial E} - \frac{\partial L'}{\partial \Phi} + \frac{\partial F'}{\partial E}, \quad I^u = \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial E_u} - \frac{\partial L'}{\partial \Phi_u} + \frac{\partial F'}{\partial E_u}. \quad (17.85)$$

Таким образом, двойственные уравнения движения Лагранжа дают или уравнения напряжения в «контурной» сети, или уравнения тока в «узловой» сети в зависимости от того, выбираются ли контравариантные переменные q^m и i^m или ковариантные переменные Φ_u и E_u .

Следует еще раз подчеркнуть, что контравариантные и ковариантные переменные не зависят друг от друга, поскольку первые появляются в контурах, а вторые — в узловых парах.

МЕТРИЧЕСКИЙ ТЕНЗОР

1. СЕТИ С НУЛЕВЫМИ КОНСТРУКТИВНЫМИ КОНСТАНТАМИ

Известно, что в неподвижных сетях \mathbf{z} и \mathbf{Y} можно разделить на три составляющих тензора-компоненты, это позволяет ввести *новые типы конструктивных констант* (состоящих только из отношений) и новые типы уравнений. Прежде чем вводить новые

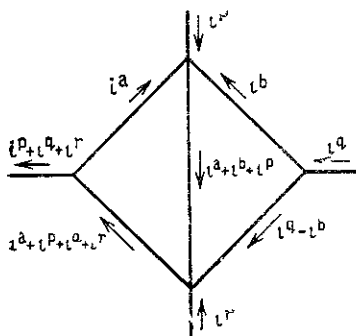


Рис. 18.1. Сеть с нулевыми импедансами.

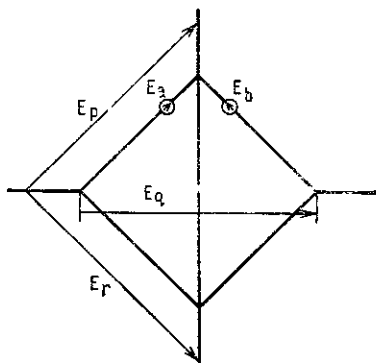


Рис. 18.2. Сеть с нулевыми адмиттансами.

типы конструктивных констант, кратко рассмотрим сети без этих констант. Такие сети играют важную роль в релейном, переключательном, управляющем и другом оборудовании.

Простейшая электрическая сеть состоит из набора соединенных ветвей, имеющих нулевые сопротивления (см. рис. 18.1) пяти ветвей, на которых нет падения напряжения. Единственное электрическое понятие, связанное с сетью, — это текущие через нее токи. Рассматривая рис. 18.1 как чисто-контурную сеть, можно с помощью первого закона Кирхгофа установить для нее не-сингулярный (квадратный) тензор преобразования C_{α}^{α} , в котором заложены все абстрактные свойства сети. Теорией этой простой сети является теория тензора C_{α}^{α} .

Двойственная рассмотренной сети состоит из набора соединенных *непроводящих ветвей* (рис. 18.2) и имеет равные нулю токи ветвей.

Единственное электрическое понятие, связанное с сетью, — это напряжение на узловых парах. С помощью второго закона Кирхгофа можно установить обратный тензор преобразования $C_{\alpha}^{\alpha'}$, в котором заложены все абстрактные свойства такой сети.

Элементарная топология изучает свойства таких сетей, с которыми не связаны никакие конструктивные константы. Сеть полностью описывается с помощью тензора преобразования.

Геометрически сеть с нулевыми конструктивными константами (но с $C_{\alpha}^{\alpha'}$) эквивалентна пространству, в котором не заданы ни «величина», ни «направление» введенных векторов.

2. БАЗОВЫЕ ИНВАРИАНТЫ

I. Первый шаг в наделении сети конструктивными константами состоит во введении сопротивлений $r=r_{mn}$, что дает уравнение напряжения для контурной сети $e=ri$.

Если с электрической сетью связана подлежащая *магнитная сеть*, то катушки наделяются дополнительными конструктивными константами, индуктансами $l=l_{mn}$, что дает уравнение напряжения $e=ri+l\frac{di}{dt}$.

Если электрическая контурная сеть *связана* также с *диэлектрической* сетью, то требуется еще одно множество конструктивных констант — эластансов $s=s_{mn}$, так что уравнение напряжения принимает вид

$$e=ri+l\dot{i}+(s/p)\dot{i}=l\frac{d^2q}{dt^2}+r\frac{dq}{dt}+sq.$$

II. Три вида независимых конструктивных констант сети: 1) тензор резистанса $r=r_{mn}$, 2) тензор индуктанса $l=l_{mn}$ и 3) тензор эластанса $s=s_{mn}$ называются «*базовыми инвариантами*» сети. Они определяют «структуру» сети.

Наложенные электромагнитные величины являются переменными; в частности, определим их как: 1) $q=q^m$ — базовая переменная, 2) $i=i^m$ — производная переменная, 3) $e=e^m$ — параметр. Есть еще также независимая переменная t .

Все другие инварианты контурной сети выводятся из этих базовых инвариантов дифференцированием или их комбинацией друг с другом или с переменными.

Хотя в общем случае компоненты структурных базовых инвариантов r , l и s являются функциями переменной, в этой книге предполагается, что их компоненты — константы. В общем случае базовые инварианты не обязательно являются тензорами.

III. Одной из целей тензорного анализа является получение других инвариантов из данных базовых инвариантов и переменных геометрической или физической системы. Получение новых инвариантов из базовых инвариантов дифференцированием было показано в гл. 15, § 4.

Другой путь получения новых инвариантов — образование *произведений* базовых инвариантов и переменных. Такие *геометрические объекты* называются «*мгновенными инвариантами*». Например, ими являются четыре скалярные «*формы*»

$$P = ie, \quad D = iri, \quad T = ili/2 \quad \text{и} \quad V = qsq/2.$$

IV. Узловая сеть обладает *двойственными инвариантами* по отношению к инвариантам контурной сети. В уравнении тока

$$I = GE + CpE + (K/p)E = C(d^2\Phi/dt^2) + G(d\Phi/dt) + K\Phi$$

базовыми инвариантами узловой сети являются: тензор проводимости $G = G^{uv}$; тензор восприимчивости $K = K^{uv}$; тензор емкости $C = C^{uv}$.

Переменными узловой сети являются: базовая переменная $\Phi = \Phi_u$; производная переменная $E = E_u$; параметр $I = I^u$.

Мгновенными инвариантами для нее являются те же, что и выше, но выраженные в терминах узловых базовых инвариантов и переменных, а именно $P' = EI$; $D' = EGE$; $T' = \Phi K \Phi / 2$; $V' = ECE/2$.

3. ОБОБЩЕНИЕ (НОРМИРОВКА) СИСТЕМЫ «НА ЕДИНИЦУ»

I. При изучении многих физических явлений или геометрических отношений или при конструировании любой инженерной структуры *одним из первых шагов в упрощении проблемы является исключение каким-либо образом из рассмотрения понятия «величина»*. Это достигается построением маломасштабных моделей или выражением проблемы в терминах *отношений* величин вместо самих действительных величин.

II. Первый шаг во введении *отношений* в задаче состоит в выборе какой-либо удобной величины — напряжения, тока и других в качестве единицы и выражении всех остальных подобных величин через их отношение. Например, ток при полной нагрузке можно принять за 1; величину тока и все другие токи выражают как дроби или целые числа от тока при полной нагрузке. Можно выбрать аналогичные единицы для выражения напряжений, реактансов и т. д.

Вместо обозначения условной величины через 1 принято также считать ее за 100% и выражать все другие количества в процентах. Это так называемая система, нормированная «на единицу», которая используется в электротехнических задачах.

С помощью таких отношений *можно сравнивать два устройства различной величины* и видеть, какое из них имеет, скажем, больший или меньший реактанс короткого замыкания, сопротивление и т. п.

Все формулы в этой книге остаются верными, если все количества выражены в системе «на единицу». Другими словами, когда речь идет о формулах книги, *неважно, в каких единицах*

измерены компоненты соответствующих геометрических объектов.

III. Этот первый шаг не вполне удовлетворительный, поскольку он не связывает количественные величины *различного типа*, такие как резистансы и реактансы. Второй шаг в проектировании различных устройств состоит в выражении их свойств в терминах *отношений* двух величин различного типа, таких как r/X (резистанс/индуктанс). При сравнении двух устройств, свойства которых выражены в терминах таких отношений, они являются мерой качества устройств по относительной эффективности, стоимости и т. п.

IV. Тензорный анализ представляет систематическую процедуру, в которой поведение физических систем выражается в терминах отношений двух различных типов конструктивных констант, а не в терминах их действительных значений. Таким образом, *тензорный анализ дает стандартную процедуру, с помощью которой действительные «значения» физических величин можно по желанию исключать и снова вводить в рассмотрение*. При исключении их заменяют отношениями физических величин, которые играют решающую роль в анализе. *Эта стандартная процедура называется «поднятием и опусканием индексов»*.

4. МЕТРИЧЕСКИЙ ТЕНЗОР a_{mn}

I. Базовым инвариантом, который играет основную роль в исключении и возобновлении понятия «величина», является тензор индуктивности $I = l_{mn}$, представляющий собственные и взаимные индуктивности различных контуров. *Из-за этой роли тензор индуктивности l_{mn} называется в тензорном анализе «метрическим тензором» и обозначается a_{mn}* (в литературе по геометрии g_{mn}).

Метрический тензор a_{mn} представляет дополнительные характеристики, приобретенные электрической сетью благодаря ее связи с соответствующей магнитной сетью. Это симметричный тензор валентности два. (Следует заметить, что в присутствии постоянных магнитов тензор индуктивности l_{mn} не является симметричным, так как нет потока в магнит и связь является однонаправленной, и его нельзя считать метрическим тензором a_{mn} .)

Например, метрический тензор двухобмоточного трансформатора (рис. 18.3) имеет вид

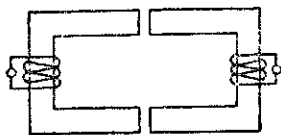


Рис. 18.3. Двухобмоточный трансформатор.

$$a = \begin{array}{c} p \quad s \\ \begin{array}{|c|c|} \hline L_p & M \\ \hline M & L_s \\ \hline \end{array} \end{array} \quad (18.1)$$

В проблемах механики компоненты метрического тензора могут быть моментами инерции и произведениями инерции различных масс.

II. Метрический тензор — один из нескольких тензоров валентности два, у которых инверсия обозначается той же базовой буквой a^{nm} . (Другими тензорами являются, например, C_{α}^{α} , и его инверсия $C_{\alpha}^{\alpha'}$; то же характерно и для единичного тензора I_{β}^{α} , инверсия которого I_{α}^{β} .)

Инверсия тензора двухобмоточного трансформатора имеет вид

$$a^{nm} = \begin{array}{c|cc} m & p & s \\ \hline n & & \\ \hline p & L_s/D & -M/D \\ s & -M/D & L_p/D \end{array}, \quad (18.2)$$

где $D = L_p L_s - M^2$. Поскольку индуктивность короткого замыкания первичной обмотки $L_p' = L_p - M^2/L_p L_s$, то $D = L_p L_p' = L_s L_s'$. Поскольку коэффициенты рассеяния есть $\lambda_p = M/L_p$ и $\lambda_s = M/L_s$, инверсия метрического тензора может быть представлена в виде

$$a^{nm} = \begin{array}{c|cc} m & p & s \\ \hline n & & \\ \hline p & 1/L_p' & -\lambda_p/L_p' \\ s & -\lambda_s/L_s' & 1/L_s' \end{array} \quad (18.3)$$

III. Поскольку индуктивности пропорциональны проницаемостям (уравнение (17.39), а инверсия магнитной проницаемости есть релактанс), можно сказать, что:

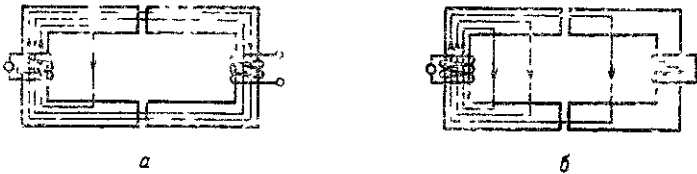


Рис. 18.4.

a — магнитные пути с максимальной проницаемостью; *b* — магнитные пути с минимальной проницаемостью.

1) метрический тензор a_{mn} представляет собственные и взаимные магнитные проницаемости подлежащей магнитной сети, измеренные при условии, что цепи всех катушек электрической сети разомкнуты;

2) инверсия метрического тензора a^{nm} представляет собственные и взаимные релактансы подлежащей магнитной сети, измеренные при замкнутых катушках электрической сети.

Другими словами:

1) при измерении компонент метрического тензора a_{mn} линии магнитного потока следуют по пути *максимально возможной* магнитной проницаемости (рис. 18.4, а); 2) при измерении компонент инверсии метрического тензора линии магнитного потока следуют по пути с минимально возможной магнитной проницаемостью (рис. 18.4, б).

5. ПОДНЯТИЕ И ОПУСКАНИЕ ИНДЕКСОВ

I. Метрический тензор a_{mn} имеет следующие важные свойства:

1. Если верхний (контравариантный) индекс любого тензора умножается на метрический тензор a_{mn} , верхний индекс становится нижним (ковариантным). Например,

$$K^{mn} a_{nk} = K^m_k \quad \text{или} \quad A_m^{nk} a_{kp} = A_m^n. \quad (18.4)$$

Все другие индексы тензора и базовая буква остаются теми же. Индексы также сохраняют надлежащий порядок:

$$K^{m \cdot k \cdot q}_{n \cdot p} a_{kr} = K^{m \cdot \dots q}_{nrp}. \quad (18.5)$$

Здесь третий верхний индекс k стал третьим нижним индексом r . Аналогично:

2. Если нижний (ковариантный) индекс любого тензора умножается на инверсию метрического тензора a^{nm} , то нижний индекс становится верхним:

$$K^{m \cdot k \cdot q}_{n \cdot p} a^{nr} = K^{mrk \cdot q}_{\dots p} \quad \text{или} \quad i^m a_{mn} = i_n. \quad (18.6)$$

Эти правила изменения индексов *не имеют силы* для геометрических объектов, они верны только для тензоров. (Следует помнить, что индексы n -матриц не являются ни ковариантными, ни контравариантными, и эти правила для них не имеют смысла.) За один шаг можно поднять или опустить несколько индексов:

$$K^{m \cdot k \cdot q}_{n \cdot p} a^{nr} a_{qt} a_{ks} = K^{mr \cdot \dots}_{\dots spt}. \quad (18.7)$$

II. Тензоры, имеющие одинаковые базовые буквы и одинаковое количество индексов, но на разных позициях, называются «ассоциированными тензорами» (см. гл. 8, § 4). Следовательно, ассоциированные тензоры могут преобразовываться друг в друга при помощи метрического тензора.

III. Если поднимается один индекс самого метрического тензора, то смешанный метрический тензор является единичным тензором I_n^m :

$$a_{mn} a^{nk} = \mathbf{a} \mathbf{a}^{-1} = \mathbf{I} = a_m^k = I_m^k. \quad (18.8)$$

Как следствие, два немых индекса, верхний и нижний, могут меняться местами:

$$R_{mn}i^n = R_m^n i_n, \quad (18.9)$$

так как $R_{mn}i^n = R_{mk}I_n^k i^n$ и $I_n^k = a^{kp}a_{np}$;

следовательно, $R_{mn}i^n = (R_{mk}a^{kp})(a_{np}i^n) = R_m^p i_p = R_m^n i_n$.

6. АССОЦИИРОВАННЫЕ ТЕНЗОРЫ КОНСТРУКТИВНЫХ КОНСТАНТ

I. Три конструктивные константы, или базовые инварианты контурной сети, определены как дважды ковариантные 2-тензоры r_{mn} , a_{mn} , s_{mn} . Если их умножить на инверсию метрического тензора, они становятся смешанными 2-тензорами:

$$r_{mn}a^{nk} = r_m^k, \quad (18.10), \quad a_{mn}a^{nk} = I_m^k, \quad (18.11), \quad s_{mn}a^{nk} = s_m^k. \quad (18.12)$$

II. Смешанный тензор резистанса r_m^k содержит такие отношения, как

$$\frac{\text{резистанс}}{\text{индуктанс короткого замыкания}} = \frac{r}{L'} = \delta = \text{декремент затухания}. \quad (18.13)$$

Для двухобмоточного трансформатора

$$r_m^n = \begin{array}{|c|c|} \hline r_p & \\ \hline & r_s \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline 1/L'_p & -\lambda_p/L'_p \\ \hline -\lambda_s/L'_s & 1/L'_s \\ \hline \end{array} = \begin{array}{c|cc} n & p & s \\ \hline m & r_p/L'_p & -\lambda_p(r_p/L'_p) \\ \hline p & -\lambda_s(r_s/L'_s) & r_s/L'_s \\ \hline s & & \end{array} \quad (18.14)$$

Через «декремент затухания» δ_p смешанный тензор резистанса выражается как

$$r_m^n = \begin{array}{c|cc} & p & s \\ \hline p & \delta_p & -\lambda_p\delta_p \\ \hline s & -\lambda_s\delta_s & \delta_s \\ \hline \end{array} \quad (18.15)$$

Если катушка с сопротивлением r не имеет взаимных индуктивностей с другими катушками, индуктанс короткого замыкания для нее тот же, что и ее собственная индуктивность L , и соответствующий член в r_m^n есть r/L .

III. Смешанный тензор эластанса S_m^n содержит такие отношения, как

$$\frac{\text{эластанс}}{\text{индуктанс короткого замыкания}} = \frac{S}{L'} = \frac{1}{CL'} = v = \text{частотный фактор.} \quad (18.16)$$

Если катушка с емкостью C не имеет взаимных индуктивно-стей с другими катушками, то соответствующий член в C_m^n есть $1/LC$.

7. АССОЦИИРОВАННЫЕ ТЕНЗОРЫ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВЕЛИЧИН

I. Если вектор тока i^m умножают на метрический тензор a_{mn} , то получают вектор потокосцепления φ_n

$$i^m a_{mn} = i_n = \varphi_n. \quad (18.17)$$

Таким образом, вектор потокосцепления φ_n может быть записан как ковариантный ток i_m . Аналогично вектор тока i^m может быть записан как контравариантный вектор потокосцепления

$$\varphi_m a^{mn} = \varphi^n = i^n. \quad (18.18)$$

В задачах механики «скорость» v^m и «количество движения» M_m (масса \times скорость) находятся в том же отношении, что и «ток» и «потокосцепление» в электротехнических задачах. Это значит, что $v^m = M^m$ и $M_m = v_m$.

II. Если вектор *воздействующего напряжения* e_m умножить на инверсию метрического тензора, то получим

$$e_m a^{mn} = e^n. \quad (18.19)$$

В электротехнике не встречается понятие, которое соответствовало бы величине e^m . Ее компоненты содержат такие выражения, как e/L' . Она представляет собой ускорение электрических зарядов. В задачах механики «ускорение» a^m и «приложенная сила» f_m (масса \times ускорение) находятся в том же отношении, что и e^m и e_m в задачах электротехники.

Точно так же нет электрического эквивалента для $q_n = q^m a_{mn}$. (Однако в узловых сетях E^u и Q_u имеют физическую интерпретацию, тогда как I_u и Φ^u не имеют ее, см. § 15.)

8. СМЕШАННЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

I. Уравнение напряжения неподвижной симметричной контурной сети

$$e_m = (r_{mn} + l_{mn}p + s_{mn}/p) i^n \quad (18.20)$$

можно выразить в терминах смешанных тензоров изменением позиции двух немых индексов n :

$$e_m = (r_m^n + l_m^n p + s_m^n/p) \varphi_n. \quad (18.21)$$

Таким образом, если в уравнении напряжения ток i^m заменяется новой переменной — потокосцеплением Φ_m , то в уравнении остаются только два вида конструктивных констант: декременты затухания δ и факторы частоты γ . Имеем

$$z_m^n = r_m^n + I_m^n p + s_m^n / p. \quad (18.22)$$

Новая величина z_m^n находится из обычного z_{mn} умножением на инверсию тензора индуктивности или метрического тензора.

II. Представляют интерес два специальных случая.

1. Если диэлектрическая сеть отсутствует,

$$z_m^n = r_m^n + I_m^n p. \quad (18.23)$$

Матрица z_m^n содержит оператор дифференцирования p только в диагональных элементах:

| | n | a | b | c | |
|-------------|-----|-------------------|-------------------|-------------------|---------|
| m | a | $\delta_{aa} + p$ | δ_{ab} | δ_{ac} | (18.24) |
| $z_m^n = b$ | | δ_{ab} | $\delta_{bb} + p$ | δ_{bc} | |
| c | | δ_{ac} | δ_{bc} | $\delta_{cc} + p$ | |

Эта матрица называется «характеристической матрицей», а соответствующее дифференциальное уравнение $e_m = z_m^n \Phi_n$ называется «характеристическим уравнением», или «вековым уравнением». Существует обширная литература по свойствам и методам решения уравнений такого типа.

2. Если можно пренебречь сопротивлениями, как это можно сделать в колебательных цепях, смешанный тензор импеданса принимает вид

$$z_m^n = I_m^n p + s_m^n / p, \quad (18.25)$$

а если нет приложенных напряжений, дифференциальное уравнение собственных колебаний системы

$$0 = (I_m^n p^2 + s_m^n) i_n \quad (18.26)$$

содержит p^2 в каждой диагональной компоненте. Это и есть «характеристическое уравнение».

III. Вместо замены тока i^m потокосцеплением Φ_m смешанные конструктивные константы можно вводить заменой e_m на e^m с умножением каждого члена на a^{mn} :

$$a^{km} e_m = a^{km} z_{mn} i^n, \quad (18.27)$$

$$e^k = z_{\cdot n}^k i^n = (r_{\cdot n}^k + I_n^k p + s_{\cdot n}^k / p) i^n.$$

IV. Лучше всего вывести сначала смешанный тензор импеданса z_m^n для примитивной контурной сети, а затем преобразовать его для реальной сети. *Формула преобразования z_m^n имеет вид*

$$z' = C_t z C_t^{-1}, \quad z_{m'}^{n'} = z_m^n C_m^m C_n^{n'}. \quad (18.28)$$

9. ПРЕИМУЩЕСТВА ИСПОЛЬЗОВАНИЯ СМЕШАННЫХ ТЕНЗОРОВ

Для конкретных расчетов и операций с числовыми значениями предпочтительно заменить уравнение для z_{mn} на z_m^n и для Y^{nm} на Y_m^n , т. е. перейти от резистансов, индуктансов и элстансов к их соотношениям, а именно к коэффициентам затухания δ и частоты ν . Преимущество их применения многопланово:

1) их значения для данного вида устройств незначительно меняются от одного устройства к другому; следовательно, окончательный численный результат можно оценить более просто, меньше будет ошибок в постановке десятичной запятой и т. д.;

2) одни и те же результаты верны для нескольких аппаратов различных размеров;

3) когда количество меди, железа или изоляции изменяется, смешанные расчетные константы меняются пропорционально;

4) эти отношения мало подвержены влиянию насыщения;

5) при составлении графиков и номограмм для быстрого определения поведения устройств определенного типа, но разных размеров смешанные конструктивные константы являются наиболее логичными параметрами, поскольку их меньше, чем обычных конструктивных констант;

6) при определении корней алгебраических уравнений относительно p для решения дифференциальных уравнений корни являются функциями только смешанных конструктивных констант;

7) при графическом исследовании поведения системы соответствующие кривые можно построить легко, если используются смешанные конструктивные константы.

Есть возможность заменить смешанные конструктивные константы, описанные в предыдущих параграфах, новыми и менее многочисленными конструктивными константами. Однако их изучение здесь не предусматривается.

(Последующая часть главы относится к геометрическим представлениям и может быть опущена без вреда для дальнейшего изложения.)

10. ЕДИНИЧНЫЙ ЭЛЛИПС

I. Когда вводится метрический тензор, то вектор тока i^m и вектор потокосцепления φ_m можно обозначать одной базовой буквой i или φ , выражая этим, что и ток i и потокосцепление i_m — два различных представления одной и той же физической сущности i .

Возникает вопрос: какую же физическую сущность представляет базовая буква i^m ? Напомним, что в гл. 8, § 3 этот вопрос остался без ответа.

Чтобы на него ответить, дадим сначала геометрическое представление метрического тензора a_{mn} на плоскости с прямолинейной системой координат и вектором тока на ней (см. гл. 8). Следует понять, что представление вектора тока i^m , лежащим в n -мерном обычном пространстве (аффинном), является слишком общим (как объяснялось в гл. 8, § 11), но оно служит для уяснения геометрического понятия «величины». Пусть, например, дан вектор тока

$$i^m = \begin{array}{c} m \\ \hline a \quad b \\ \hline |1,340|0,772| \end{array} \quad (18.29)$$

Предположим, что на плоскости (рис. 18.5) любые два отрезка OA и OB вдоль осей a и b являются единичными. Тогда, измерив $OM = 1,34 OA$ по оси a и $ON = 0,772 OB$ по оси b , определим по правилу параллелограмма точку K . Длина OK представляет данный вектор тока i^m , так как его компоненты OM и ON равны соответственно 1,34 и 0,772.

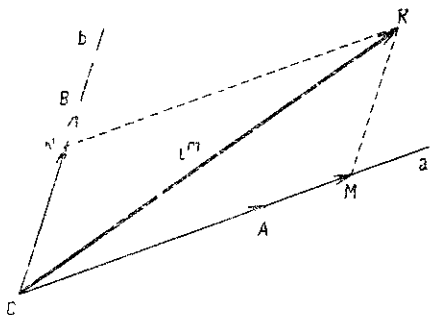


Рис. 18.5. Контравариантный вектор i^m .

II. Возникает вопрос: что такое «величина» вектора OK (или что такое «расстояние» между точками O и K)? Теоретически допустимо связать с вектором OK любое произвольное число и назвать его «величиной» вектора (или «расстоянием между O и K). Практически, однако, имеется следующий механизм приписывания «величины» любому вектору, изображенному на плоскости с началом в точке O .

Изобразим на плоскости произвольный эллипс с центром в точке O . По определению, любой контравариантный вектор, проведенный из точки O до пересечения с эллипсом, имеет единичную величину. Если вектор не касается эллипса, его величина измеряется с помощью этой единицы.

Например, величина вектора OK (рис. 18.6) есть $OK/OP = 1,73$, где P — точка пересечения вектора OK с эллипсом.

Таким образом, в каждом направлении единицей величины служат разные отрезки и один и тот же вектор OK имеет разную величину, когда он вращается вокруг начала координат, так как эллипс отсекает различные его отрезки в зависимости от направления.

В n -мерном пространстве эллипс становится $(n-1)$ -мерным эллипсоидом или «квадратичной поверхностью».

III. Это сложное определение «величины» вектора (или расстояния между двумя точками) упрощается до обычного определения в частном случае, когда (рис. 18.7): 1) оси перпендику-

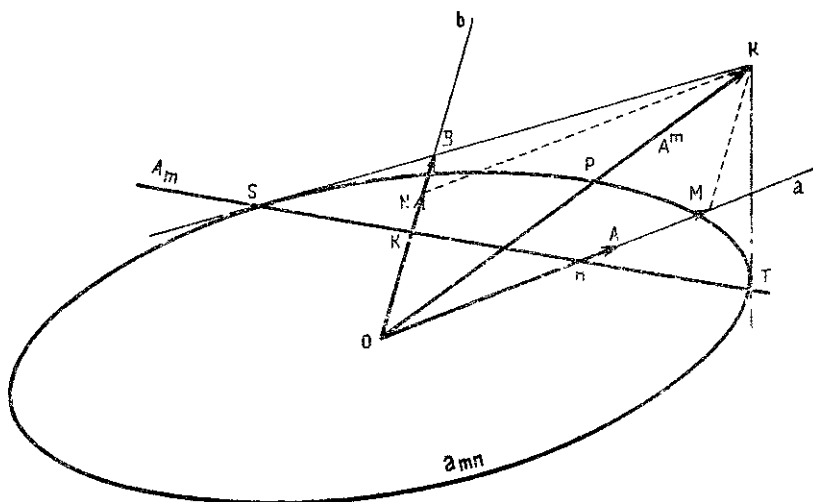


Рис. 18.6. Представление метрического тензора a_{mn} .

лярны; 2) два единичных вектора OA и OB равны; 3) эллипс есть окружность; 4) окружность проходит через точки A и B .

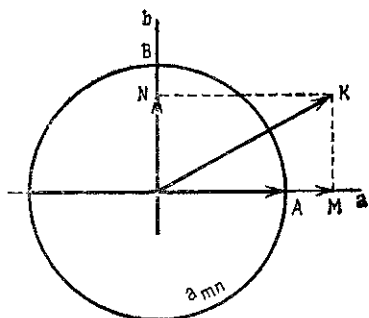


Рис. 18.7. Метрический тензор в евклидовом пространстве.

IV. Отметим, что *не существует связи между введенными измеряемыми векторами OM и ON и введенным эллипсом, они совершенно независимы друг от друга.* Введение измеряемых векторов определяет «компоненты» i^m , а введение эллипса определяет «величину» i^m .

Отметим также, что *нет необходимости определять «величину» вектора, когда заданы его «компоненты».* Например, в общем случае тензора импеданса z_{mn} метрический тензор a_{mn} может не определяться, но тем не менее e_m и i^m существуют геометрически и физически.

Таким образом, при использовании уравнения $e_m = z_{mn} i^n$ понятие «величина» вообще не рассматривается.

Таким образом, при использовании уравнения $e_m = z_{mn} i^n$ понятие «величина» вообще не рассматривается.

11. ВЕЛИЧИНА ВЕКТОРА

I. Единичный эллипс, служащий шкалой для определения «величины», может также служить геометрическим представлением метрического тензора a_{mn} . Так, если заданы компоненты метрического тензора, то можно построить единичный эллипс. Если

$$a_{mn} = \begin{array}{c|cc} & n & a & b \\ \hline m & a & 0,6 & 0,547 \\ & b & 0,547 & 1,32 \end{array}, \quad (18.30)$$

то единичная квадратичная поверхность определяется как

$$a_{mn} i^m i^n = 1, \quad (18.31)$$

где i^m может принимать любые значения. Для заданного значения a_{mn} это уравнение имеет вид

$$0,6(i^a)^2 + 2 \times 0,547 i^a i^b + 1,32(i^b)^2 = 1.$$

Если i^a принимает различные значения и уравнение решается относительно i^b , точка описывает эллипс, изображенный на рис. 18.6. Таким образом, метрический тензор a_{mn} определяет квадратичную поверхность с помощью уравнения (18.31), так же как ковариантный вектор e_m определяет плоскость с помощью уравнения (8.3) ($e_m i^m = 1$).

II. Если задан вектор A^m , его «величина» определяется с помощью метрического тензора следующим образом:

$$(\text{Величина } A^m)^2 = |A|^2 = a_{mn} A^m A^n. \quad (18.32)$$

Эта формула является обобщением для прямолинейных осей теоремы Пифагора для прямоугольных осей.

Например, если A^m — вектор, заданный в уравнении (18.29) и изображенный как OK на рис. 18.5, то квадрат его величины есть AaA или

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1,34 & 0,722 \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline 0,6 & 0,547 \\ \hline 0,547 & 1,32 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline 1,226 \\ \hline 1,752 \\ \hline \end{array}$$

и

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1,226 & 1,752 \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|} \hline 1,34 \\ \hline 0,72 \\ \hline \end{array} = 3. \quad (18.33)$$

Следовательно, величина A^m есть $\sqrt{3} = 1,73$. Рис. 18.6 задает также $OK/OP = 1,73$.

Поскольку $a_{mn}A^m = A_n$, величина A_m также есть
 (Величина A^m)² = $|A|^2 = A_m A^m = a^{mn} A_m A_n$. (18.34)

12. ПОЛЮС И ПОЛЯРА ЭЛЛИПСА

Контравариантный вектор A^m представляет точку K на рис. 18.6. Если он умножается на a_{mn} , то становится ковариантным вектором $a_{mn}A^m = A_n$:

$$A_n = \begin{array}{|c|c|} \hline 0,6 & 0,547 \\ \hline 0,547 & 1,32 \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|} \hline 1,34 \\ \hline 0,722 \\ \hline \end{array} \downarrow \begin{array}{|c|c|} \hline n & a & b \\ \hline 1,227 & 1,752 \\ \hline \end{array} \quad (18.35)$$

Он представляется прямой ST на рис. 18.6, отрезки пересечения которой с осями равны $OK = 1/1,227$ и $OH = 1/1,752$.

Существует интересное соотношение между прямой A_m и точкой A^m . Если заданы точка A^m и эллипс a_{mn} , прямая A_m находится построением касательных из точки A^m к эллипсу a_{mn} . Касательные обозначены KS и KT . Прямая A_m соединяет точки касания касательных с эллипсом. Точка K называется «*полюсом*» а прямая ST — «*полярной*» эллипса. Если одна из величин задана, другая однозначно определяется. Итак, точка A^m есть «*полюс*», а прямая A_m — соответствующая «*поляра*» эллипса a_{mn} .

В n -мерном пространстве (где A^m имеет n компонент) a_{mn} есть $(n-1)$ -мерная квадратичная поверхность (эллипсоид), A^m — точка, а A_m — $(n-1)$ -мерная гиперплоскость, «*полярная плоскость*» этого «*полюса*» относительно квадратичной поверхности. Если задан эллипсоид (a_{mn}) , для каждой точки A^m n -мерного пространства имеется одна и только одна $(n-1)$ -мерная полярная гиперплоскость A_m и наоборот.

13. НАКОПЛЕННАЯ МАГНИТНАЯ ЭНЕРГИЯ

I. Контравариантный вектор i^m представляет токи в контурах. Его «*величина*» равна

$$(величина i^m)² = $|i|^2 = a_{mn} i^m i^n = 2T$. (18.36)$$

Следовательно, квадрат «*величины*» вектора тока i^m равен удвоенному значению накопленной магнитной энергии в сети.

Ковариантный вектор $i_m = \varphi_m$ представляет потокосцепление контуров. Его величина

$$|\varphi|^2 = a^{mn} \varphi_m \varphi_n = \varphi_m i^m. \quad (18.37)$$

Таким образом, квадрат величины вектора φ_m потокосцепления также равен удвоенной накопленной магнитной энергии.

Следовательно, вектор тока i^m и вектор потокосцепления φ_m — два различных представления одной и той же физической

сущности: «накопленной магнитной энергии» или «кинетической энергии» системы.

II. Фундаментальная физическая сущность, присутствующая в сети или где-либо в природе, — есть «энергия». Любая форма энергии обладает свойством быть измеримой приборами в двух различных проявлениях: 1) как «интенсивный фактор», подобно току i^m или скорости v^m , которые представлены как контравариантные компоненты энергии; 2) как «экстенсивный фактор», подобно потокоцеплению φ_m или импульсу M_m , которые представлены как ковариантные компоненты энергии.

Произведение интенсивных и экстенсивных величин есть энергия, т. е. произведение контравариантного вектора и ковариантного есть энергия, подобно тому как $2T = i^m \varphi_m = v^m M_m$.

Таким образом, если известны только одни «компоненты» вектора тока i^m , то невозможно определить, как много накопленной магнитной энергии они представляют. Их наличие указывает только на наличие физической сущности магнитной энергии.

То же самое происходит, если известен только вектор φ_m . Если, однако, известен также метрический тензор a_{mn} , то из одного вектора тока или из одного вектора потокоцепления можно получить количество накопленной магнитной энергии (т. е. «величину» i^m или φ_m).

Другими словами, со многими контурными сетями связана реально существующая физическая субстанция — накопленная магнитная энергия i . Эта сущность имеет два вида компонент в сети, которые можно измерить приборами двух различных типов. Контравариантные величины i^m измеряются амперметрами, ковариантные компоненты i_m — измерителями потока (флюксометрами).

Нет таких физических величин в сети, как «результурующий вектор тока» или «результурующий вектор потокоцепления». Есть, однако, физически существующая «величина» — «общая накопленная магнитная энергия», i , которая имеет «контравариантные компоненты» i^m и «ковариантные компоненты» $i_m = \varphi_m$.

Компоненты i могут принимать различные значения в разных системах координат, но величина i не зависит от выбора системы координат.

14. ТЕРМОДИНАМИКА СЕТЕЙ

I. Для простоты рассмотрим ортогональную сеть только с накопленной магнитной энергией; скажем, сеть многообмоточного трансформатора, в котором будем пренебрегать сопротивлением обмоток.

В любой ортогональной сети из n катушек k контуров с k воздействующими напряжениями e могут рассматриваться как входные клеммы, а $n-k$ узловых пар, дающих $n-k$ токов нагрузки I на внешних нагрузках, как клеммы выхода. Другими

словами, любую ортогональную сеть можно рассматривать как обобщенный трансформатор, в котором контуры являются входными клеммами, а узловые пары — выходными. Энергия течет в контуры и покидает сеть из узловых пар, а сама сеть играет роль устройства, преобразующего величину, фазу и число напряжений и токов.

Следовательно, ортогональная сеть преобразует одну форму электрической энергии в другую.

II. В ортогональных сетях метрический тензор $a = a_{\alpha\beta}$ (представляющий собственные и взаимные индуктивности) может принимать два экстремальных значения:

1) если узловые пары разомкнуты и в нагрузке нет тока I , то a равно той же величине для контурной сети a_1 и имеет k строк и столбцов;

2) если узловые пары замкнуты и на нагрузках нет напряжения E , то a становится равным

$$a' = a_1 - a_2 a_4^{-1} a_3. \quad (18.38)$$

В первом случае накопленная магнитная энергия в сети минимальна и линии потока идут по пути с максимальной магнитной проницаемостью. Во втором случае накопленная магнитная энергия максимальна и линии потока идут по пути с минимальной магнитной проницаемостью. Когда сеть нагружена, накопленная энергия принимает промежуточное значение между двумя экстремальными значениями. Поток энергии существует при постоянной температуре («изотермический» процесс).

Минимально возможная накопленная энергия называется «связанной энергией» сети, а разность между максимальной и минимальной накопленной энергией называется «свободной энергией» (или «термодинамическим потенциалом»).

Энергия, которая покидает систему, всегда образуется за счет свободной энергии. «Свободная энергия» характеризует способность сети выделять энергию во внешнюю нагрузку.

III. «Эффективность» сети в смысле обеспечения энергией внешних нагрузок можно представить одним числом

$$\eta = \frac{\text{свободная энергия}}{\text{максимальная накопленная энергия}} = \frac{\text{максимальная энергия} - \text{минимальная энергия}}{\text{максимальная накопленная энергия}}. \quad (18.39)$$

В двухобмоточном трансформаторе это отношение характеризует «коэффициент связи». Таким образом, величина η представляет также меру связи между контурами и узловыми парами.

IV. Этим закончим интересные и важные термодинамические рассуждения.

15. ДВОЙСТВЕННЫЙ МЕТРИЧЕСКИЙ ТЕНЗОР

I. Предыдущие рассуждения можно повторить слово в слово для узловых сетей, если все «контурные» величины заменить соответствующими «двойственными» величинами.

Тензор емкости C^{uv} играет роль двойственного метрического тензора A^{uv} , который повышает и понижает индексы тензоров, встречающихся в уравнении тока. Так, смешанные тензоры имеют вид

$$G^{uv} A_{vw} = G^u_w, \quad C^{uv} A_{vw} = I^u_w, \quad K^{uv} A_{vw} = K^u_w. \quad (18.40)$$

Смешанный тензор проводимости G^u_w представляет

$$\frac{\text{проводимость}}{\text{емкость «открытой цепи»}} = \frac{G}{C'} = S'G, \quad (18.41)$$

а смешанный тензор восприимчивости K^u_w представляет

$$\frac{\text{восприимчивость}}{\text{емкость «открытой цепи»}} = \frac{K}{C'} = \frac{1}{LC'}. \quad (18.42)$$

II. Контравариантная переменная напряжения E^u

$$E_u A^{uv} = E^v = Q^v \quad (18.43)$$

эквивалентна электрическому заряду Q^u , так что $E_u = Q_u$.

Однако теперь $I_u = I^v A_{vu}$ и $\Phi^u = \Phi_v A^{vu}$ не имеют физической интерпретации так же, как в контурных сетях ее не имели величины e^m и q_m .

В терминах смешанных тензоров уравнение тока имеет вид

$$I^u = (G^u_v + I^u_v \rho + K^u_v / \rho) Q^v = Y^u_v Q^v. \quad (18.44)$$

III. Квадрат «величины» вектора напряжения E_u (или вектор заряда Q_u) равен удвоенной запасенной электростатической энергии в сети

$$|E|^2 = |Q|^2 = A^{uv} E_u E_v = A_{uv} Q^u Q^v = E_u Q^u = 2V. \quad (18.45)$$

Следовательно, вектор напряжения E_u и вектор заряда Q^u являются двумя видами представления одной и той же «физической сущности» — «запасенной электростатической энергии», или «потенциальной энергии» системы.

IV. Следует отметить, что с теоретической точки зрения нет причин предпочитать употребление $a_{mn} = l_{mn}$ вместо $A^{uv} = C^{uv}$. Во всех книгах по тензорному анализу только a_{mn} считается единственным метрическим тензором, так как не вводится двойственная точка зрения. Однако двойственная точка зрения в сетях (и в топологии) приводит к необходимости введения двойственного метрического тензора, а также и других двойственных понятий и уравнений.

16. «ПОДЛЕЖАЩИЕ» ПРОСТРАНСТВА И «ЛОКАЛЬНЫЕ» ПРОСТРАНСТВА

I. В гл. 8 контравариантная переменная i^m геометрически представлялась (в первом приближении) точкой в n -мерном аффинном пространстве, проекции которой (измерены относительно общего начала) представляли компоненты i^m . Однако когда i^m становится переменной dq^m/dt , полученной из базовой переменной q^m , то даже это приблизительное представление требует дальнейшего развития. *Только базовая переменная q^m представляется вектором, проведенным из фиксированного начала в переменную точку.*

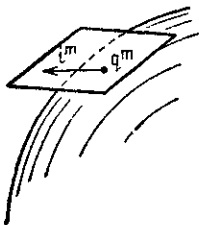


Рис. 18.8. Искривленное подлежащее пространство и скользящее локальное пространство.

Чтобы сделать более наглядным представление производной переменной i^m , предположим, что точка q^m лежит на изогнутой поверхности вроде сферы с закрепленным началом, относительно которого измеряются все компоненты q^m в некоторой криволинейной системе координат. Чтобы представить $i^m = dq^m/dt$, рассмотрим в точке q^m касательную плоскость (рис. 18.8). Если точка q^m движется, то эта касательная плоскость движется вместе с ней.

В касательной плоскости для каждой точки q^m можно ввести множество систем координат, оси которых касательны к осям на подлежащей криволинейной поверхности. Другими словами, точка q^m — точка соприкосновения плоскости и поверхности — служит началом системы координат в касательной плоскости. В общем случае и поверхность и плоскость n -мерны.

II. Теперь производная переменная i^m представляется точкой на касательной плоскости, в то время как базовая переменная q^m представляется точкой на подлежащей поверхности. Так как точка q^m служит началом i^m , то можно заметить, что начало q^m закреплено, тогда как начало i^m не закреплено. Когда значение q^m изменяется, локальное пространство движется по подлежащему пространству вместе с i^m .

Криволинейная поверхность, геометрическое место точек базовой переменной q^m , называется «подлежащим пространством», а плоскость, геометрическое место точек, изображающих производную переменную dq^m или dq^m/dt , называется «локальным пространством» или «касательным пространством». При изучении сетей подлежащее пространство не криволинейное, а плоское, так что в двух измерениях оно становится плоскостью и два пространства соприкасаются на всем протяжении. В этом случае i^m представляется вектором, проведенным между двумя точками $q^m = OA$ и $q^m + dq^m/dt = OB$ (рис. 18.9).

Когда значение q^m изменяется до OA' , i^m изменяется до $A'B'$.

III. Переменная точка q^m служит началом не только для dq^m или dq^m/dt , но и для любого другого определенного тензора. Другими словами, все ранее введенные тензоры полагаются расположенными в касательном пространстве, точка соприкосновения которого с подлежащим пространством изменяется всякий раз, когда изменяется q^m .

Например, центр эллипсоида, представляющего метрический тензор a_{mn} , также движется вместе с точкой q^m (рис. 18.10). Если a_{mn} — функция, то в каждой точке подлежащего пространства эллипсоид a_{mn} имеет различную форму. Таким образом,

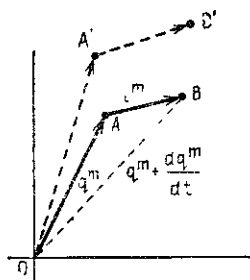


Рис. 18.9. Вектор q^m с фиксированным началом. Вектор l^m с переменным началом.

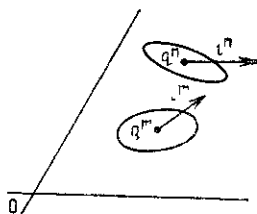


Рис. 18.10. Изменение метрического тензора от точки к точке.

в общем случае измерение единицы «длины» вектора не только различно по разным направлениям, но и изменяется от точки к точке в подлежащем пространстве.

IV. В этой главе исследовался вопрос о том, что является величиной вектора. Он вызвал рождение сущности в виде первого фундаментального инварианта тензорного анализа — «метрического тензора» $a_{\alpha\beta}$.

Поскольку положение всех векторов изменяется с изменением q^m , то такой вектор, как AB (рис. 18.9), также изменяется до $A'B'$. Перемещение векторов из одного положения в другое вызывает вопрос: когда вектор $A'B'$ параллелен вектору AB ? Этот вопрос рождает второй фундаментальный инвариант тензорного анализа — «аффинную связность» $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$, которая, однако, не вводится в этой книге. Тензор резистанса $r_{\alpha\beta}$ также будет играть свою роль в определении параллелизма двух векторов.

КОМПАУНД-СЕТИ**1. БАЗОВЫЕ УРАВНЕНИЯ АКТИВНЫХ АСИММЕТРИЧНЫХ СЕТЕЙ**

1. После того как уравнение поведения сети получено, обычно предполагают дальнейшие действия. Для этого единое тензорное уравнение делят на два, три, четыре и более уравнений в зависимости от решаемой задачи. В частности, можно сделать следующие разбиения:

1. Уравнение напряжений *контурной* сети $\mathbf{e} = \mathbf{z}\mathbf{i}$ разделяют на

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= z_{11} \mathbf{i}^1 + z_{12} \mathbf{i}^2 + z_{13} \mathbf{i}^3 + \dots + z_{1n} \mathbf{i}^n, \\ \mathbf{e}_2 &= z_{21} \mathbf{i}^1 + z_{22} \mathbf{i}^2 + z_{23} \mathbf{i}^3 + \dots + z_{2n} \mathbf{i}^n, \\ \mathbf{e}_3 &= z_{31} \mathbf{i}^1 + z_{32} \mathbf{i}^2 + z_{33} \mathbf{i}^3 + \dots + z_{3n} \mathbf{i}^n, \\ &\dots \\ \mathbf{e}_n &= z_{n1} \mathbf{i}^1 + z_{n2} \mathbf{i}^2 + z_{n3} \mathbf{i}^3 + \dots + z_{nn} \mathbf{i}^n. \end{aligned} \quad (19.1)$$

Эта система n тензорных уравнений аналогична системе n обычных уравнений, представляющих уравнение напряжения n -контурной сети.

2. Уравнение токов *узловой* сети $\mathbf{I} = \mathbf{Y}\mathbf{E}$ разделяют на

$$\begin{aligned} \mathbf{I}^1 &= \mathbf{Y}^{11} \mathbf{E}_1 + \mathbf{Y}^{12} \mathbf{E}_2 + \mathbf{Y}^{13} \mathbf{E}_3 + \dots + \mathbf{Y}^{1n} \mathbf{E}_n, \\ \mathbf{I}^2 &= \mathbf{Y}^{21} \mathbf{E}_1 + \mathbf{Y}^{22} \mathbf{E}_2 + \mathbf{Y}^{23} \mathbf{E}_3 + \dots + \mathbf{Y}^{2n} \mathbf{E}_n, \\ \mathbf{I}^3 &= \mathbf{Y}^{31} \mathbf{E}_1 + \mathbf{Y}^{32} \mathbf{E}_2 + \mathbf{Y}^{33} \mathbf{E}_3 + \dots + \mathbf{Y}^{3n} \mathbf{E}_n, \\ &\dots \\ \mathbf{I}^n &= \mathbf{Y}^{n1} \mathbf{E}_1 + \mathbf{Y}^{n2} \mathbf{E}_2 + \mathbf{Y}^{n3} \mathbf{E}_3 + \dots + \mathbf{Y}^{nn} \mathbf{E}_n. \end{aligned} \quad (19.2)$$

Эта система n тензорных уравнений аналогична системе n обычных уравнений, представляющих сеть с n узловыми парами.

3. Уравнение напряжений *ортогональной* сети $\mathbf{E} + \mathbf{e} = \mathbf{z}(\mathbf{i} + \mathbf{I})$ сначала разбивают на ортогональные уравнения напряжений

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_m + \mathbf{e}_m &= z_{mm} (\mathbf{i}^m + \mathbf{I}^m) + z_{mj} (\mathbf{i}^j + \mathbf{I}^j), \\ \mathbf{E}_j + \mathbf{e}_j &= z_{jm} (\mathbf{i}^m + \mathbf{I}^m) + z_{jj} (\mathbf{i}^j + \mathbf{I}^j), \end{aligned} \quad (19.3)$$

каждое из которых можно также разбить на два или более уравнений, например:

$$\begin{aligned}
 E_{m1} + e_{m1} &= z_{m1m1}(i^{m1} + I^{m1}) + z_{m1m2}(i^{m2} + I^{m2}) + \dots \\
 &\dots z_{m1j1}(i^{j1} + I^{j1}) + z_{m1j2}(i^{j2} + I^{j2}) + \dots, \\
 E_{m2} + e_{m2} &= z_{m2m1}(i^{m1} + I^{m1}) + z_{m2m2}(i^{m2} + I^{m2}) + \dots \\
 &\dots + z_{m2j1}(i^{j1} + I^{j1}) + z_{m2j2}(i^{j2} + I^{j2}) + \dots \\
 &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\
 E_{j1} + e_{j1} &= z_{j1m1}(i^{m1} + I^{m1}) + z_{j1m2}(i^{m2} + I^{m2}) + \dots \\
 &+ z_{j1j1}(i^{j1} + I^{j1}) + z_{j1j2}(i^{j2} + I^{j2}) + \dots, \\
 E_{j2} + e_{j2} &= z_{j2m1}(i^{m1} + I^{m1}) + z_{j2m2}(i^{m2} + I^{m2}) + \dots \\
 &\dots z_{j2j1}(i^{j1} + I^{j1}) + z_{j2j2}(i^{j2} + I^{j2}) \quad (19.4) \\
 &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots
 \end{aligned}$$

Эта система $m+n$ инвариантных уравнений является обобщением обычного уравнения напряжений для ортогональной сети с m контурами и n узловыми парами.

4. Уравнение токов *ортогональной* сети $i + I = Y(E + e)$ сначала разбивают на ортогональные уравнения токов

$$\begin{aligned}
 I^m + i^m &= Y^{mm}(E_m + e_m) + Y^{mj}(E_j + e_j), \\
 I^j + i^j &= Y^{jm}(E_m + e_m) + Y^{jj}(E_j + e_j),
 \end{aligned} \quad (19.5)$$

каждое из которых можно разделить затем на два или более уравнений, например:

$$\begin{aligned}
 i^{m1} + I^{m1} &= Y^{m1m1}(E_{m1} + e_{m1}) + Y^{m1m2}(E_{m2} + e_{m2}) + \dots \\
 &\dots + Y^{m1j1}(E_{j1} + e_{j1}) + Y^{m1j2}(E_{j2} + e_{j2}) + \dots, \\
 i^{m2} + I^{m2} &= Y^{m2m1}(E_{m1} + e_{m1}) + Y^{m2m2}(E_{m2} + e_{m2}) + \dots \\
 &+ Y^{m2j1}(E_{j1} + e_{j1}) + Y^{m2j2}(E_{j2} + e_{j2}) + \dots \\
 &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\
 i^{j1} + I^{j1} &= Y^{j1m1}(E_{m1} + e_{m1}) + Y^{j1m2}(E_{m2} + e_{m2}) + \dots \\
 &\dots + Y^{j1j1}(E_{j1} + e_{j1}) + Y^{j1j2}(E_{j2} + e_{j2}) + \dots, \\
 i^{j2} + I^{j2} &= Y^{j2m1}(E_{m1} + e_{m1}) + Y^{j2m2}(E_{m2} + e_{m2}) + \dots \\
 &\dots + Y^{j2j1}(E_{j1} + e_{j1}) + Y^{j2j2}(E_{j2} + e_{j2}) + \dots \quad (19.6) \\
 &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots
 \end{aligned}$$

Эта система $m+n$ тензорных уравнений также аналогична системе обычных уравнений токов для ортогональной сети, имеющей m контуров и n узловых пар.

II. Перечисленные четыре типа систем тензорных уравнений представляют собой полный набор базовых уравнений для активных асимметричных сетей и служат отправной точкой для их анализа и синтеза. Каждое тензорное уравнение соотнесено системе осей, функция которых неизменна на протяжении всего анализа.

В дальнейшем не будем специально подчеркивать, что эти четыре типа систем тензорных уравнений не являются матричными уравнениями. Они являются тензорными уравнениями, представляющими поведение большого разнообразия сетей, а не только одной конкретной сети. В предшествующем изложении был установлен механизм, с помощью которого можно определить компоненты этих тензоров для некоторой части сети из n катушек в том случае, если они известны для некоторой другой сети из n катушек. Различные группы преобразований, которые оставляют эти уравнения инвариантными, являются подгруппами группы «линейных преобразований», или «группы «аффинных преобразований» G_n . Некоторые группы преобразований определены в гл. 11, § 6.

2. КОМПАУНД-СЕТИ

I. Система тензорных уравнений аналогична по форме системе обычных уравнений, представляющих некоторую физическую систему. Для визуализации системы тензорных уравнений представляется довольно логичным построить физическую систему, в которой каждый составной элемент сам по себе уже является системой, так что он характеризуется не обычными числами, а тензорами. Такую фиктивную физическую систему, в которой составные элементы сами являются некоторыми системами, мы будем называть «компаунд-системой» (по аналогии с «компаунд-тензорами», в которых каждая компонента сама по себе уже является не обычным числом, а тензором).

Чтобы физически обосновать системы тензорных уравнений предыдущего параграфа, введем фиктивную «компаунд-сеть», в которой собственные и взаимные импедансы катушек являются тензорами валентности два, а токи и напряжения в отдельных катушках — не простыми величинами, а векторами. Такие компаунд-катушки в отличие от обычных катушек будем изображать жирными линиями. Каждая компаунд-катушка на самом деле представляет собой целую сеть.

Фиктивные компаунд-сети, уравнения которых были приведены в предыдущем параграфе, показаны на рис. 19.1 для случая, когда число тензорных уравнений равно четырем. Это значит, что в контурной компаунд-сети токи и напряжения определены только в контурах, в узловых компаунд-сети — только на узловых парах, а в ортогональной компаунд-сети — как в контурах, так и в узловых парах.

Каждая компаунд-катушка представляет некоторую сеть, базис которой может быть физически определенным или может иметь гипотетические оси аналогично случаю с симметричными составляющими.

Компонентами каждого z могут быть реальные индуктансы или же другие гипотетические константы, такие как реактансы потерь. Это означает, что отдельные координатные оси каждой

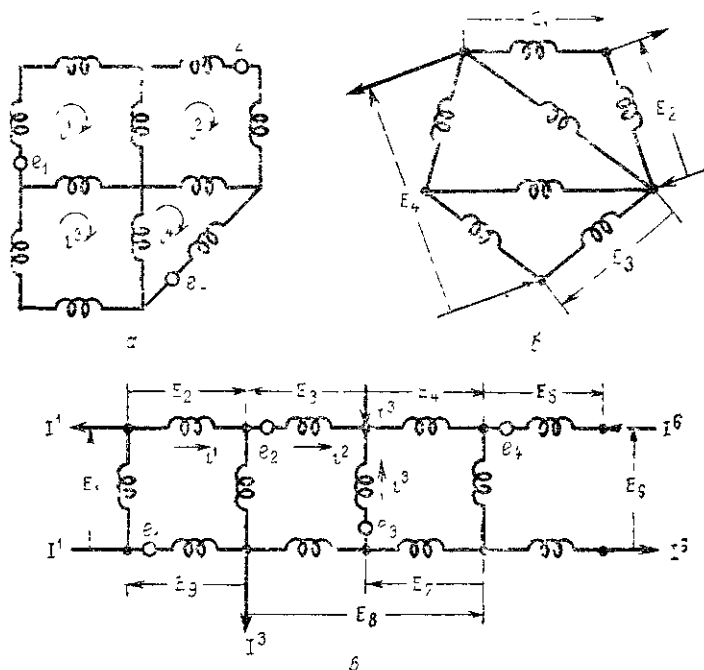


Рис. 19.1. Три типа компаунд-сетей:

a — крестовая компаунд-сеть; *b* — узловая компаунд-сеть; *в* — ортогональная компаунд-сеть.

компаунд-катушки можно выбирать несколько произвольно с помощью тензора отдельного преобразования без каких-либо изменений в самой компаунд-сети. Каждая компаунд-катушка имеет свой собственный тензор преобразования.

Компаунд-сети вводятся как основное понятие в рамках эффективного метода, позволяющего составлять уравнения сложных сетей, манипулировать ими и решать эти уравнения так же просто, как обычные уравнения для простых, несложных сетей.

II. Все теории, законы, уравнения, соображения, развитые для обычных сетей в предыдущих главах книги, справедливы и для компаунд-сетей с той лишь разницей, что простые величины надо заменить в них соответствующими тензорами, а простые тензоры — соответствующими компаунд-тензорами.

Например, можно *соединять* компаунд-катушки (каждая из которых представляет сложную сеть) в компаунд-сеть с помощью *компаунд-тензора преобразования* C , в котором *каждая компонента является не целым числом, а тензором валентности два*, или с помощью последовательности таких компаунд-тензоров преобразования. Можно *исключить* отдельные контуры или узловые пары, которые не участвуют в анализе сети, исключить токи намагничивания и т. д. Метод анализа и действия с компаунд-сетями с известными оговорками аналогичны методу анализа обычных сетей.

3. ФУНКЦИОНАЛЬНОЕ РАЗБИЕНИЕ СЕТЕЙ

I. Существует множество способов изображения сети в виде некоторой компаунд-сети. Наиболее очевидным путем является разбиение сетей *физически* на составные части, при этом предполагается, что сеть составлена из них, как из элементов, соединенных друг с другом различными способами. Наименьшими составными частями могут быть, например, трехфазные трансформаторы, генераторы, линии электропередачи и т. д. Другой менее очевидной, но более важной точкой зрения является разделение контуров и узловых пар на более мелкие единицы в соответствии с их *функцией*.

II. Узловые пары сети могут выполнять различные функции, например:

1) некоторые узловые пары выполняют роль зажимов для приложенных напряжений E или воздействующих токов I ; такие узловые пары будем называть *входными* клеммами;

2) некоторые из них могут служить зажимами для *нагрузок* или для присоединения внешних сетей, не учитываемых в уравнениях или схемах сети; в этом случае I представляют собой токи в нагрузках, а E — разность потенциалов в нагрузках; такие узловые пары будем называть *выходными* зажимами;

3) узловые пары могут быть *управляемыми*; например, разность потенциалов E на них может поддерживаться с помощью регулятора постоянного напряжения или изменяться по заданному закону;

4) некоторые узловые пары могут подвергаться определенным *изменениям*; например, к ним можно присоединить катушку с заданным импедансом Z или замкнуть их накоротко, или изменять приложенное напряжение на данной узловой паре и т. д.;

5) узловые пары могут оказаться вообще постоянно *разомкнутыми*, так что через них не протекает ток; знание разности потенциалов E на таких парах необязательно, так как соответствующие им координатные оси можно исключить из Y .

III. Различные контуры в сети могут выполнять аналогичные функции. Однако *функции контуров обычно не так очевид-*

ны, как функции узловых пар. Например, контурное напряжение e_a может играть роль входного напряжения лишь в том случае, если вдоль всего контура (состоящего из многих катушек) оно является единственным приложенным напряжением (рис. 19.2, а), а также если это приложенное напряжение e_a существует в ветви, которая не является общей с другими контурами. Подобные оговорки можно сделать и по поводу других контурных величин, таких как нагрузка в контуре (рис. 19.2, б) и т. п.

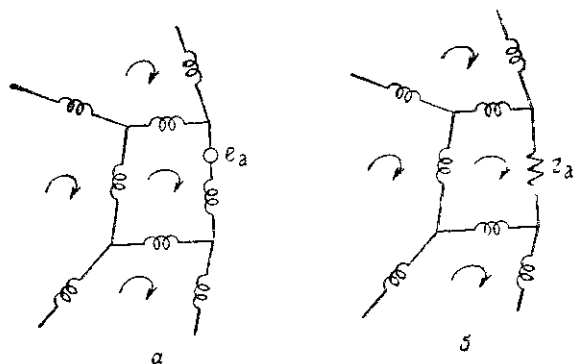


Рис. 19.2. Контурные величины как величины на зажимах сети:
 а — контурное напряжение как напряжение на зажимах; б — контурная катушка как нагрузка на зажимах.

IV. В некоторых сетях может оказаться любое количество типов узловых пар и контуров, функционально отличных друг от друга. Как следствие этого, *единое уравнение* поведения сети *разбивается на столько тензорных уравнений, сколько в ней имеется функционально различных типов узловых пар и контуров.*

Функциональное разбиение сетей детально разбирается в гл. 22 и 23. В последующих нескольких параграфах обсуждаются общие сетевые теоремы, применяемые для уменьшения числа тензорных уравнений в ходе анализа сети.

4. ИСКЛЮЧЕНИЕ ПЕРЕМЕННЫХ

I. *Уравнение поведения сети разделяется на столько тензорных уравнений, сколько функционально различных типов узловых пар и контуров имеется в сети.* Однако часто случается, что некоторые из узловых пар или контуров *не требуются* при анализе. Например, узловые пары, через которые не идет ток \mathbf{I} , или контуры, в которых нет приложенных напряжений \mathbf{e} в ходе анализа, являются «пассивными», и соответствующие тензорные уравнения выступают в качестве балласта как в процессе вы-

кладок, так и в окончательном результате. Такие ненужные уравнения следует исключать еще перед началом анализа.

Нужно помнить, что если уравнение напряжений (z) составлено, пассивными узловыми парами пренебрегают, но пассивными контурами — нет. Чтобы исключить их из рассмотрения, уравнения следует подвергнуть редукции по формулам гл. 10. Точно так же, если уравнение токов (Y) составлено, то игнорируются лишь пассивные контуры. Пассивные узловые пары можно исключить из рассмотрения лишь редукцией уже составленного уравнения

II. Компаунд-сети и их тензорные уравнения можно упрощать точно так же, как простые сети и их уравнения. Это означает, что число контуров в них можно сократить преобразованием контур-звезда, число узловых пар — преобразованием звезда-контур и т. д. Эти редукции (упрощения) выполняются исключением одной или более переменных из систем тензорных уравнений по формулам, приведенным в гл. 10.

Редукцию излишних осей следует проводить по возможности до операций с уравнениями.

5. РЕДУКЦИЯ (УПРОЩЕНИЕ) УЗЛОВЫХ КОМПАУНД-СЕТЕЙ

I. В качестве примера рассмотрим узловую сеть (рис. 19.3), имеющую три типа узловых пар. К первой совокупности узловых пар приложено напряжение $E_1 (E_1, E_2, E_3)$, вторая совокупность соединена с нагрузками, имеющими разности потенциалов

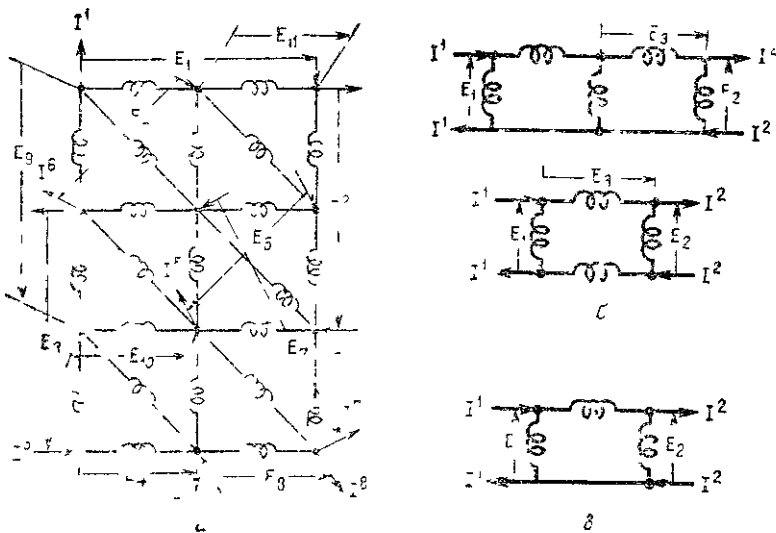


Рис 19.3. Замена обычной узловой сети узловой компаунд-сетью:

а — заданная узловая сеть б — два типа узловых компаунд-сетей, в — эквивалентная л-сеть

$E_2(E_4, E_5, E_6, E_7, E_8)$. Оставшиеся узловые пары $E_3(E_9, E_{10}, E_{11})$ являются постоянно-разомкнутыми и не играют роли в задаче, но их наличие учитывается при составлении уравнения токов.

Соответственно уравнение токов системы $I = YE$, содержащее 11 обычных уравнений, необходимо разделить на три тензорных уравнения:

$$\begin{aligned} I^1 &= Y^1 E_1 - Y^2 E_2 - Y^3 E_3, \\ I^2 &= Y^4 E_1 - Y^5 E_2 - Y^6 E_3, \\ 0 &= Y^7 E_1 - Y^8 E_2 - Y^9 E_3. \end{aligned} \quad (19.7)$$

В предположении, что приложенное напряжение E_1 — положительное, разности потенциалов E_2 нагрузки и E_3 на открытых узловых парах следует считать отрицательными.

Ток $I^3 = 0$. Входным током является I_1 , нагрузочным током — I^2 . Первое тензорное уравнение представляет три обычных уравнения, второе — пять, а третье — три. Эти тензорные уравнения справедливы для множества сетей, имеющих такие же три типа узловых пар.

Узловая компаунд-сеть, представленная тремя тензорными уравнениями, показана в двух различных формах на рис. 19.3 б. Эти сети имеют три узловые пары (по одной узловой паре на уравнение) и, следовательно, четыре узла. Число выбираемых компаунд-контуров не играет роли, так как контуры не присутствуют явно в тензорных уравнениях. Для облегчения анализа сложную действительную сеть (рис. 19.3, а) заменяют простой компаунд-сетью (рис. 19.3, б). (Следует упомянуть, что тем самым простое тензорное уравнение $I = YE$ представляется простой открытой катушкой, имеющей одну узловую пару.)

II. Теперь, если для анализа важны лишь входные величины E_1 , I^1 и выходные E_2 , I^2 , переменную E_3 можно исключить. При этом число тензорных уравнений уменьшается с трех до двух. Результатом исключения является то, что узловая компаунд-сеть (рис. 19.3, б) упрощается (рис. 19.3, в) и имеет две узловые пары вместо трех. Катушки упрощенной сети соединяются в π-сеть.

III. Уравнение новой сети (рис. 19.3, в) находят исключением E_3 из третьего уравнения системы (19.7) с помощью формул редукции (14.63) и (14.64), что дает

$$\begin{aligned} I^1 &= Y^{1'} E_1 - Y^2 E_2, \\ I^2 &= Y^3 E_1 - Y^4 E_2, \end{aligned} \quad (19.8)$$

где совокупность адмиттансов открытых цепей

$$\begin{aligned} Y^{1'} &= Y^1 - Y^3 Y^9 - 1 Y^7, & Y^{3'} &= Y^4 - Y^6 Y^9 - 1 Y^7, \\ Y^{2'} &= Y^2 - Y^3 Y^9 - 1 Y^8, & Y^{4'} &= Y^5 - Y^6 Y^9 - 1 Y^9 \end{aligned} \quad (19.9)$$

представляет π -сеть (сеть с двумя узловыми парами), имеющую лишь входные и выходные зажимы. Постоянно разомкнутые узловые пары исключены из рассмотрения. Их место заняли адмиттансы Y^1, Y^2, Y^3, Y^4 , представляющие собственные и взаимные адмиттансы входа и выхода, измеренные при условии, что остальные узловые пары разомкнуты.

IV. Если бы исключенные узловые пары не были постоянно разомкнутыми и на них действовал ток I^3 , соответствующее уравнение было бы исключено, а система приведена к π -сети. Однако действующие токи I^1 и I^2 меняются при этом на новые токи I^1' и I^2' , определяемые по формулам приведения как

$$\begin{aligned} I^1' &= I^1 - Y^3 Y^9 - I^3, \\ I^2' &= I^2 + Y^6 Y^9 - I^3. \end{aligned} \quad (19.10)$$

Следует напомнить, что для исключения k узловых пар из системы необходимо обратить матрицу Y^9 , имеющую k строк и столбцов.

Анализ упрощенного уравнения (19.8) гораздо проще анализа исходного уравнения (19.7).

V. Такие этапы анализа выполняют и в том случае, если нужно исключить два или более уравнений, а число уравнений исходной системы больше трех.

6. РЕДУКЦИЯ КОНТУРНОЙ КОМПАУНД-СЕТИ

I. Рассмотрим контурную сеть (рис. 19.4, а), которая содержит систему входных контуров с током $i^1 (i^1, i^2)$ и систему выходных контуров с током $i^2 (i^3, i^4)$, а также третью совокупность кон-

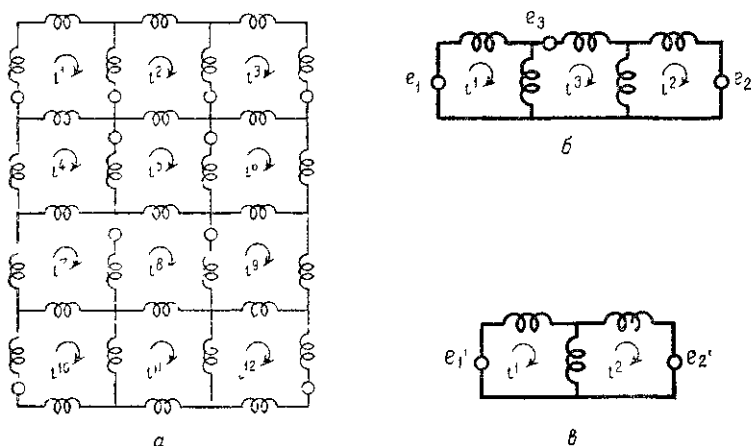


Рис. 19.4. Замена обычной контурной сети компанд-сетью:

а — заданная контурная сеть; б — контурная компанд-сеть; в — эквивалентная Т-сеть.

туров с током $i^3 (i^5 - i^{12})$, не играющую в анализе никакой роли. На рис. 19.4, б показана соответствующая контурная компаунд-сеть с тремя контурами.

Запишем три тензорных уравнения, представляющих систему обычных уравнений $e = z i$ контурной сети с контурами трех типов:

$$\begin{aligned} e_1 &= z_1 i^1 + z_2 i^2 + z_3 i^3, \\ e_2 &= z_4 i^1 + z_5 i^2 + z_6 i^3, \\ e_3 &= z_7 i^1 + z_8 i^2 + z_9 i^3. \end{aligned} \quad (19.11)$$

Третья совокупность контуров исключается по формуле редукции (10.28) или с помощью такой процедуры, которая применяется к обычным уравнениям. При этом получаем

$$e'_1 = z'_1 i^1 + z'_2 i^2, \quad (19.12)$$

$$e'_2 = z'_3 i^1 + z'_4 i^2,$$

где

$$e'_1 = e_1 - z_3 z_9^{-1} e_3, \quad (19.13)$$

$$e'_2 = e_2 - z_6 z_9^{-1} e_3;$$

$$z'_1 = z_1 - z_3 z_9^{-1} z_7, \quad z'_3 = z_4 - z_6 z_9^{-1} z_7, \quad (19.14)$$

$$z'_2 = z_2 - z_3 z_9^{-1} z_8; \quad z'_4 = z_5 - z_6 z_9^{-1} z_8.$$

Импедансы со штрихами z'_1, z'_2, z'_3 и z'_4 являются собственными и взаимными импедансами входных и выходных контуров, измеренными при наличии токов в остальных контурах. Новые приложенные напряжения e'_1 и e'_2 включают напряжение e_3 , приложенное к исключенным контурам.

Если же исключенные контуры не содержат приложенных напряжений, то e'_1 и e'_2 равны соответственно e_1 и e_2 .

II. Аналогичные этапы упрощения пригодны и в том случае, если исходная система уравнений содержит более трех тензорных уравнений и исключается больше одного из этих уравнений.

7. УПРОЩЕНИЕ ОРТОГОНАЛЬНЫХ КОМПАУНД-СЕТЕЙ

I. Предположим, что задана ортогональная сеть с двумя типами контуров и двумя типами узловых пар (рис. 19.5, а).

Уравнения этой сети в (19.4) записаны как

$$\begin{aligned} e_1 &= z_1 i^1 + z_2 i^2 + z_3 I^1 + z_4 I^2, \\ e_2 &= z_5 i^1 + z_6 i^2 + z_7 I^1 + z_8 I^2, \\ E_1 &= z_9 i^1 + z_{10} i^2 + z_{11} I^1 + z_{12} I^2, \\ E_2 &= z_{13} i^1 + z_{14} i^2 + z_{15} I^1 + z_{16} I^2. \end{aligned} \quad (19.15)$$

II. Предположим, что один из контуров и одна из узловых пар для анализа лишние. Поэтому *исключим, например, второе и четвертое тензорные уравнения*. Тогда сеть будет содержать *один контур и одну узловую пару* (рис. 19.5, б).

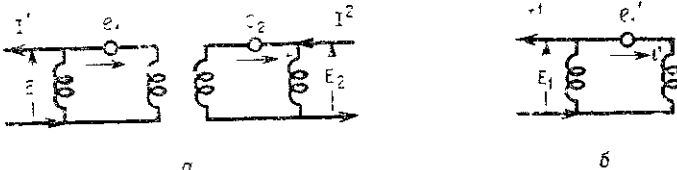


Рис. 19.5. Упрощение ортогональной компаунд-сети:
а — перед упрощением; б — после упрощения.

Заметим, что исключенный контур имеет приложенное напряжение e_2 , а исключенная узловая пара подает ток $-I^2$ в нагрузку (или, что то же самое, имеет воздействующий ток I^2).

Исключив I^2 из последнего уравнения, получим

$$I^2 = -z_{16}^{-1} (z_{13} i^1 + z_{14} i^2 + z_{15} I^1 - E_2)$$

и подставим в оставшиеся три уравнения

$$\begin{aligned} e_1 &= (z_1 - z_4 z_{16}^{-1} z_{13}) i^1 + (z_2 - z_4 z_{16}^{-1} z_{14}) i^2 \\ &\quad + (z_3 - z_4 z_{16}^{-1} z_{15}) I^1 + z_4 z_{16}^{-1} E_2, \\ e_2 &= (z_5 - z_6 z_{16}^{-1} z_{13}) i^1 + (z_6 - z_6 z_{16}^{-1} z_{14}) i^2 \\ &\quad + (z_7 - z_8 z_{16}^{-1} z_{15}) I^1 + z_8 z_{16}^{-1} E_2, \\ E_1 &= (z_9 - z_{12} z_{16}^{-1} z_{13}) i^1 + (z_{10} - z_{12} z_{16}^{-1} z_{14}) i^2 \\ &\quad + (z_{11} - z_{12} z_{16}^{-1} z_{15}) I^1 + z_{12} z_{16}^{-1} E_2. \end{aligned}$$

Это может быть также записано как

$$\begin{aligned} e_1 &= z'_1 i^1 + z'_2 i^2 + z'_3 I^1 + z_4 z_{16}^{-1} E_2, \\ e_2 &= z'_5 i^1 + z'_6 i^2 + z'_7 I^1 + z_8 z_{16}^{-1} E_2, \\ E_1 &= z'_9 i^1 + z'_{10} i^2 + z'_{11} I^1 + z_{12} z_{16}^{-1} E_2. \end{aligned} \quad (19.16)$$

III. Исключим i^2 из второго уравнения

$$i^2 = -z_6'^{-1}(z_5' i^1 + z_7' I^1 + z_8 z_{16}^{-1} E_2 - e_2)$$

и подставим в оставшиеся два уравнения

$$\begin{aligned} e_1 - z_2' z_6'^{-1} e_2 - (z_4 z_{16}^{-1} - z_2' z_6'^{-1} z_8 z_{16}^{-1}) E_2 &= \\ &= (z_1' - z_2' z_6'^{-1} z_5') i^1 + (z_3' - z_2' z_6'^{-1} z_7') I^1, \\ E_1 - z_{10}' z_6'^{-1} e_2 - (z_{12} z_{16}^{-1} - z_{10}' z_6'^{-1} z_8 z_{16}^{-1}) E_2 &= \\ &= (z_9' - z_{10}' z_6'^{-1} z_5') i^1 + (z_{11}' - z_{10}' z_6'^{-1} z_7') I^1. \end{aligned}$$

Эти два уравнения можно записать как

$$\begin{aligned} e_1 &= z_1'' i^1 + z_2'' I^1, \\ E_1 &= z_3'' i^1 + z_4'' I^1. \end{aligned} \quad (19.17)$$

Импедансы, помеченные двумя штрихами, представляют собой собственные и взаимные импедансы оставшегося контура и узловой пары, измеренные в присутствии исключаемых контуров и узловых пар. Аналогично e_1'' и E_1'' — изменившиеся входные напряжения, отличные от действительных e_1 и E_1 из-за наличия исключаемых e_2 и E_2 .

8. ТЕРМИНОЛОГИЯ КОМПАУНД-СЕТЕЙ

Концепция компаунд-сети (каждая катушка представляет целую сеть) предполагает, что *вся терминология для импедансов обычных сетей может быть перенесена на компаунд-сети с заменой обычных числовых значений компонент соответствующими тензорами*.

Назовем некоторые термины и их устойчивые сочетания, которые будут употребляться при анализе компаунд-сетей.

1. *Собственные и взаимные импедансы* z_{11} , z_{12} и адмиттансы Y^{11} , Y^{12} , называемые также импедансами и адмиттансами «точки движения» и «переноса» в обычных сетях.

2. *Собственный импеданс короткого замыкания* z_{11}' (равный $z_{11} - z_{12} z_{22}^{-1} z_{21}$) и собственный адмиттанс размыкания Y^{11} (равный $Y^{11} - Y^{12} Y^{22-1} Y^{21}$).

3. *Взаимный импеданс короткого замыкания (переноса)* z_{12}' и взаимный адмиттанс размыкания Y^{12} , существующий между различными совокупностями зажимов, которые приведены, например, в уравнениях (19.12) и (19.9).

Другими понятиями являются также

4. *Коэффициенты потерь* $\lambda =$ (взаимный импеданс/собственный импеданс) или $=$ (взаимный адмиттанс/собственный адмиттанс)

то есть $z_{12}z_{11}^{-1}$ или $Y^{12}Y^{11-1}$. Они являются тензорами валентности два, каждая компонента которых есть отношение двух импедансов или адмиттансов.

Такие коэффициенты потерь были уже введены в уравнениях (19.10) и (19.13), где показано, что *любое приложенное напряжение e или воздействующий ток I одной совокупности зажимов можно преобразовать* в напряжение и ток другой совокупности зажимов умножением их (e и I) на *соответствующие коэффициенты потерь*. Произведение представляет собой напряжение размыкания на второй совокупности зажимов.

Например, в уравнении (19.13) приложенное напряжение e_3 можно «перенести» на входные зажимы как $-z_3z_9^{-1}e_3$, где $z_3z_9^{-1}$ — коэффициент потерь. Аналогично в уравнении (19.10) воздействующий ток I_3 переносится на выходные зажимы как $-Y^6Y^{9-1}I_3$, где Y^6Y^{9-1} — его коэффициент потерь. Произведение представляет собой ток короткого замыкания на выходных зажимах.

5. *Импедансы потерь* $z_1 = z_{11} - z_{12}$ — собственный импеданс минус взаимный импеданс, а адмиттанс потерь $Y^1 = Y^{11} - Y^{12}$. Например, тензорные уравнения симметричной двухконтурной компаунд-сети

$$e_1 = z_{11}i^1 + z_{12}i^2, \tag{19.18}$$

$$e_2 = z_{12}i^1 + z_{22}i^2$$

можно определить на T -сети (рис. 19.6, б); эта сеть не имеет взаимных импедансов между тремя катушками, а $z_1 = z_{11} - z_{12}$ и $z_2 =$

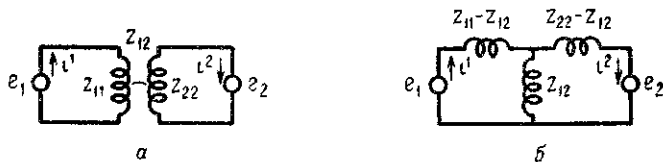


Рис. 19.6

а — двухконтурная сеть; б — эквивалентная T -сеть

$= z_{22} - z_{12}$ аналогично эквивалентной T -сети для двухобмоточных трансформаторов.

9. ФИЗИЧЕСКОЕ РАЗДЕЛЕНИЕ СЕТЕЙ

1. В предыдущих параграфах предполагалось, что сеть образована компаунд-катушками, различающимися функциональным назначением. Другим способом является физическое разделение исходной сети на компаунд-катушки, каждая из которых сама по себе является сетью, так что действительная сеть состо-

ит из этих составляющих сетей, соединенных последовательно или параллельно и т. п.

Примером такого разделения может служить трехфазная сеть электропередачи, состоящая из совокупности линий электропередачи, трансформаторов, генераторов, нагрузок и т. д.

Другой пример — *цепи вакуумных ламп*, состоящие из усилителей, модуляторов, трансформаторов, неподвижных сетей, соединенных различными способами. Можно назвать также *коммуникационные сети*, состоящие из передающей и приемной аппаратуры, линий передачи, фильтров, корректирующих цепей, взаимосвязанных четырехполюсников и т. д.; *силовые установки*, состоящие из различных типов вращающихся электрических машин, соединенных с неподвижными сетями, а также управляющих сетей, релейных систем и т. д. Практически все электрические сети и электромеханические системы можно разделить *физически* на множество меньших единиц, каждая из которых затем анализируется отдельно, и результаты анализа вновь объединить для исходной системы.

Определенные общие принципы идентичны и справедливы для анализа всех сложных систем. Некоторые из них описаны при более детальном анализе трехфазных линий электропередач.

II. *Метод анализа компаунд-сети подобен методу анализа обычной сети, разница лишь в том, что каждая обычная величина заменяется тензором, а каждый тензор — соответствующим компаунд-тензором.* Например, если компаунд-сеть является *контурной* сетью, то:

1) составляют примитивную компаунд-сеть и определяют ее геометрические объекты z , e и i (компаунд-тензоры);

2) определяют токи, протекающие в компаунд-сети;

3) тензор преобразования компаунд-сети C получают приравнением старых и новых токов в каждой катушке;

4) геометрические объекты действительной сети определяют как $z' = C_i z C$, $e' = C_i^* e$, $i' = z'^{-1} e'$. Величины, характеризующие отдельные катушки, находят как $i = C i'$, $e_c = z C i'$, $y_c = C y' C_i^*$ и т. д.

Естественно, компаунд-сеть можно анализировать как контурную, ортогональную или узловую в зависимости от существа проблемы.

III. Будет установлено, что второй из перечисленных шагов, а именно определение токов через компаунд-сеть, уже не является такой простой процедурой, как для обычной сети, так как приходится учитывать способы соединения отдельных катушек в каждой компаунд-катушке.

10. ТРЕХФАЗНЫЕ УСТРОЙСТВА КАК КОМПАУНД-КАТУШКИ

I. В трехфазных компаунд-сетях для простоты можно предположить, что тензор импеданса z каждой компаунд-катушки перед их объединением определен тремя отдельными катушками (в отдельной примитивной сети), т. е. число столбцов равно или кратно трем (конечно, в компаунд-сетях общего вида отдельные катушки можно представлять относительно любых произвольных осей). Индивидуальный тензор преобразования каждого устройства также находят заменой его примитивной сети действительным устройством.

II. Тензор импеданса *неслабанизированного* трехфазного генератора линии электропередачи или трехфазной нагрузки можно представить как

$$z = \begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|c|} \hline a & b & c \\ \hline Z_1 & Z_2 & Z_3 \\ \hline b & Z_4 & Z_5 & Z_6 \\ \hline c & Z_7 & Z_8 & Z_9 \\ \hline \end{array} \end{array} \quad (19.19)$$

Этот тензор в общем случае несимметричен. Компаунд-сеть такого устройства изображается в виде простой катушки (рис. 19.7, б). Некоторые специальные случаи приведены в первом столбце табл. 19.1.

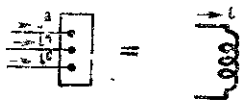
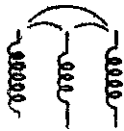
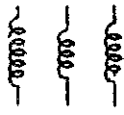
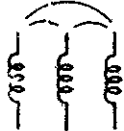

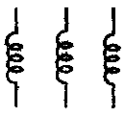
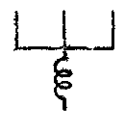


Рис. 19.7.
а — трехфазное устройство; б — компаунд-катушка

III. Тензоры импеданса трехфазных *многообмоточных трансформаторов* имеют три, шесть, девять, двенадцать и т. д. строк столбцов в зависимости от числа степеней свободы трансформаторов. Их компонентами могут быть действительные реактансы или реактансы потерь, как показано в гл. 11, § 11. Выраженный через реактансы потерь тензор импеданса *двухобмоточного* трехфазного трансформатора выглядит так же, как для трансформатора, состоящего из *трех однофазных трансформаторов*, если пренебречь намагничивающими токами:

Таблицы импедансов трехфазных катушек разных типов

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|-------|---|--|----------|---|---|---|---|----------|----------|----------|-------|----------|----------|----------|---|----------|----------|----------|--|--|---|---|---|---|----------|----------|----------|-------|----------|----------|----------|---|----------|----------|----------|
| 1 |  | <table border="1"> <tr><td></td><td>a</td><td>b</td><td>c</td></tr> <tr><td>a</td><td>Z_{aa}</td><td>Z_{ab}</td><td>Z_{ac}</td></tr> <tr><td>Z = b</td><td>Z_{ba}</td><td>Z_{bb}</td><td>Z_{bc}</td></tr> <tr><td>c</td><td>Z_{ca}</td><td>Z_{cb}</td><td>Z_{cc}</td></tr> </table> | | a | b | c | a | Z_{aa} | Z_{ab} | Z_{ac} | Z = b | Z_{ba} | Z_{bb} | Z_{bc} | c | Z_{ca} | Z_{cb} | Z_{cc} | <table border="1"> <tr><td></td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr> <tr><td>0</td><td>Z_{00}</td><td>Z_{01}</td><td>Z_{02}</td></tr> <tr><td>Z = 1</td><td>Z_{10}</td><td>Z_{11}</td><td>Z_{12}</td></tr> <tr><td>2</td><td>Z_{20}</td><td>Z_{21}</td><td>Z_{22}</td></tr> </table> | | 0 | 1 | 2 | 0 | Z_{00} | Z_{01} | Z_{02} | Z = 1 | Z_{10} | Z_{11} | Z_{12} | 2 | Z_{20} | Z_{21} | Z_{22} |
| | | | a | b | c | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| a | Z_{aa} | Z_{ab} | Z_{ac} | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Z = b | Z_{ba} | Z_{bb} | Z_{bc} | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| c | Z_{ca} | Z_{cb} | Z_{cc} | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | 0 | 1 | 2 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 0 | Z_{00} | Z_{01} | Z_{02} | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Z = 1 | Z_{10} | Z_{11} | Z_{12} | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 2 | Z_{20} | Z_{21} | Z_{22} | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 2 |  | <table border="1"> <tr><td></td><td>a</td><td>b</td><td>c</td></tr> <tr><td>a</td><td>Z_a</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>Z = b</td><td></td><td>Z_b</td><td></td></tr> <tr><td>c</td><td></td><td></td><td>Z_c</td></tr> </table> | | a | b | c | a | Z_a | | | Z = b | | Z_b | | c | | | Z_c | <table border="1"> <tr><td></td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr> <tr><td>0</td><td>Z_0</td><td>Z_2</td><td>Z_1</td></tr> <tr><td>Z = 1</td><td>Z_1</td><td>Z_0</td><td>Z_2</td></tr> <tr><td>2</td><td>Z_2</td><td>Z_1</td><td>Z_0</td></tr> </table> | | 0 | 1 | 2 | 0 | Z_0 | Z_2 | Z_1 | Z = 1 | Z_1 | Z_0 | Z_2 | 2 | Z_2 | Z_1 | Z_0 |
| | | | a | b | c | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| a | Z_a | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Z = b | | Z_b | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| c | | | Z_c | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | 0 | 1 | 2 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 0 | Z_0 | Z_2 | Z_1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Z = 1 | Z_1 | Z_0 | Z_2 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 2 | Z_2 | Z_1 | Z_0 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 3 |  | <table border="1"> <tr><td></td><td>a</td><td>b</td><td>c</td></tr> <tr><td>a</td><td>Z</td><td>X_1</td><td>X_2</td></tr> <tr><td>Z = b</td><td>X_2</td><td>Z</td><td>X_1</td></tr> <tr><td>c</td><td>X_1</td><td>X_2</td><td>Z</td></tr> </table> | | a | b | c | a | Z | X_1 | X_2 | Z = b | X_2 | Z | X_1 | c | X_1 | X_2 | Z | <table border="1"> <tr><td></td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr> <tr><td>0</td><td>Z_0</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>Z = 1</td><td></td><td>Z_1</td><td></td></tr> <tr><td>2</td><td></td><td></td><td>Z_2</td></tr> </table> | | 0 | 1 | 2 | 0 | Z_0 | | | Z = 1 | | Z_1 | | 2 | | | Z_2 |
| | | | a | b | c | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| a | Z | X_1 | X_2 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Z = b | X_2 | Z | X_1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| c | X_1 | X_2 | Z | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | 0 | 1 | 2 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 0 | Z_0 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Z = 1 | | Z_1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 2 | | | Z_2 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 4 |  | <table border="1"> <tr><td></td><td>a</td><td>b</td><td>c</td></tr> <tr><td>a</td><td>Z</td><td>X</td><td>X</td></tr> <tr><td>Z = b</td><td>X</td><td>Z</td><td>X</td></tr> <tr><td>c</td><td>X</td><td>X</td><td>Z</td></tr> </table> | | a | b | c | a | Z | X | X | Z = b | X | Z | X | c | X | X | Z | <table border="1"> <tr><td></td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr> <tr><td>0</td><td>$Z + 2X$</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>Z = 1</td><td></td><td>$Z - X$</td><td></td></tr> <tr><td>2</td><td></td><td></td><td>$Z - X$</td></tr> </table> | | 0 | 1 | 2 | 0 | $Z + 2X$ | | | Z = 1 | | $Z - X$ | | 2 | | | $Z - X$ |
| | | | a | b | c | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| a | Z | X | X | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Z = b | X | Z | X | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| c | X | X | Z | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | 0 | 1 | 2 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 0 | $Z + 2X$ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Z = 1 | | $Z - X$ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 2 | | | $Z - X$ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 5 |  | <table border="1"> <tr><td></td><td>a</td><td>b</td><td>c</td></tr> <tr><td>a</td><td>Z</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>Z = b</td><td></td><td>Z</td><td></td></tr> <tr><td>c</td><td></td><td></td><td>Z</td></tr> </table> | | a | b | c | a | Z | | | Z = b | | Z | | c | | | Z | <table border="1"> <tr><td></td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr> <tr><td>0</td><td>Z</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>Z = 1</td><td></td><td>Z</td><td></td></tr> <tr><td>2</td><td></td><td></td><td>Z</td></tr> </table> | | 0 | 1 | 2 | 0 | Z | | | Z = 1 | | Z | | 2 | | | Z |
| | | | a | b | c | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| a | Z | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Z = b | | Z | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| c | | | Z | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | 0 | 1 | 2 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 0 | Z | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Z = 1 | | Z | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 2 | | | Z | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 6 |  | <table border="1"> <tr><td></td><td>a</td><td>b</td><td>c</td></tr> <tr><td>a</td><td>Z_g</td><td>Z_g</td><td>Z_g</td></tr> <tr><td>Z = b</td><td>Z_g</td><td>Z_g</td><td>Z_g</td></tr> <tr><td>c</td><td>Z_g</td><td>Z_g</td><td>Z_g</td></tr> </table> | | a | b | c | a | Z_g | Z_g | Z_g | Z = b | Z_g | Z_g | Z_g | c | Z_g | Z_g | Z_g | <table border="1"> <tr><td></td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr> <tr><td>0</td><td>$3Z_g$</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>Z = 1</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>2</td><td></td><td></td><td></td></tr> </table> | | 0 | 1 | 2 | 0 | $3Z_g$ | | | Z = 1 | | | | 2 | | | |
| | | | a | b | c | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| a | Z_g | Z_g | Z_g | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Z = b | Z_g | Z_g | Z_g | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| c | Z_g | Z_g | Z_g | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | 0 | 1 | 2 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 0 | $3Z_g$ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Z = 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

Первый столбец — z в фазных осях; второй столбец — z в последовательных осях.

$$z = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} & z_{1-2} \\ z_{1-2} & \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} & \begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 & a_2 & b_2 & c_2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} & & & z'_{1-2} & & \\ & & & & z'_{1-2} & \\ & & & & & z''_{1-2} \\ z'_{1-2} & & & & & \\ & z''_{1-2} & & & & \\ & & z''_{1-2} & & & \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (19.20)$$

Это означает, что *каждый компаунд-реактанс потерь имеет диагональную матрицу*. Если три однофазных трансформатора отличаются один от другого, то все три диагональные компоненты также отличаются друг от друга.

Тензор импеданса трехфазного *трехобмоточного* трансформатора через реактансы потерь представляется в виде

$$z = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} & z_{1-2} & z_{1-3} \\ z_{1-2} & & z_{2-3} \\ z_{1-3} & z_{2-3} & \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (19.21)$$

Каждая компонента этого тензора сама является диагональным тензором валентности два.

Если все три фазы задействованы в одной и той же магнитной сети и если пренебречь намагничивающим током, то между разными фазами появляются взаимные индуктивности, тогда тензор импеданса двухобмоточного трансформатора равен

$$z = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} z_{1-1} & z_{1-2} \\ z_{1-2} & z_{2-2} \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} & \begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 & a_2 & b_2 & c_2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} & z_{a-b}^{11} & z_{a-c}^{11} & z_{a-c}^{12} & z_{a-b}^{12} & z_{a-c}^{12} \\ z_{a-b}^{11} & & z_{b-c}^{11} & z_{b-a}^{12} & z_{b-b}^{12} & z_{b-c}^{12} \\ z_{a-c}^{11} & z_{b-c}^{11} & & z_{c-a}^{12} & z_{c-b}^{12} & z_{c-c}^{12} \\ z_{a-a}^{12} & z_{b-a}^{12} & z_{c-a}^{12} & & z_{a-b}^{22} & z_{a-c}^{22} \\ z_{a-b}^{12} & z_{b-b}^{12} & z_{c-a}^{12} & z_{a-b}^{22} & & z_{b-c}^{22} \\ z_{a-c}^{12} & z_{b-c}^{12} & z_{c-c}^{12} & z_{a-c}^{22} & z_{b-c}^{22} & \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (19.22)$$

В примитивной компаунд-сети двухобмоточный трехфазный трансформатор представляется двумя катушками, а n -обмоточный трансформатор — n катушками (рис. 19.8 и 19.9).

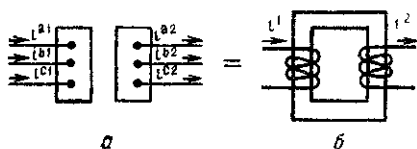


Рис. 19.8.

а — двухобмоточный трехфазный трансформатор; б — двухобмоточный компаунд-трансформатор.

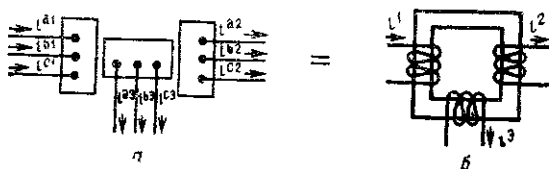


Рис. 19.9.

а — трехобмоточный трехфазный трансформатор; б — трехобмоточный компаунд-трансформатор.

IV. Если между двумя трехфазными устройствами, например между двумя линиями электропередачи, имеется взаимная индуктивность, то тензор импеданса примитивной компаунд-сети равен

$$z = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{12} & z_{22} \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} & \begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 & a_2 & b_2 & c_2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} Z_1 & Z_2 & Z_3 & Z_4 & Z_5 & Z_6 \\ Z_2 & Z_7 & Z_8 & Z_9 & Z_{10} & Z_{11} \\ Z_3 & Z_8 & Z_{12} & Z_{13} & Z_{14} & Z_{15} \\ Z_4 & Z_9 & Z_{13} & Z_{16} & Z_{17} & Z_{18} \\ Z_5 & Z_{10} & Z_{14} & Z_{17} & Z_{19} & Z_{20} \\ Z_6 & Z_{11} & Z_{15} & Z_{18} & Z_{20} & Z_{21} \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (19.23)$$

V. Если трехфазные устройства представлены компаунд-катушками, то последовательные и параллельные соединения различных трехфазных устройств представляются аналогичными последовательным и параллельным соединениями соответствующих компаунд-катушек. *Диаграмма компаунд-сети несимметричных трехфазных систем полностью идентична однолиней-*

ной диаграмме симметричных трехфазных систем Незначительное отличие состоит в том, что здесь контуры замкнуты для того, чтобы сделать применимыми методы анализа обычных контурных сетей.

11. ТЕНЗОР ПРЕОБРАЗОВАНИЯ КОМПАУНД-СЕТИ

I. Рассмотрим сначала простой пример, в котором отдельные катушки каждого трехфазного устройства еще не соединены в схему, т. е. не существует отдельных тензоров преобразования

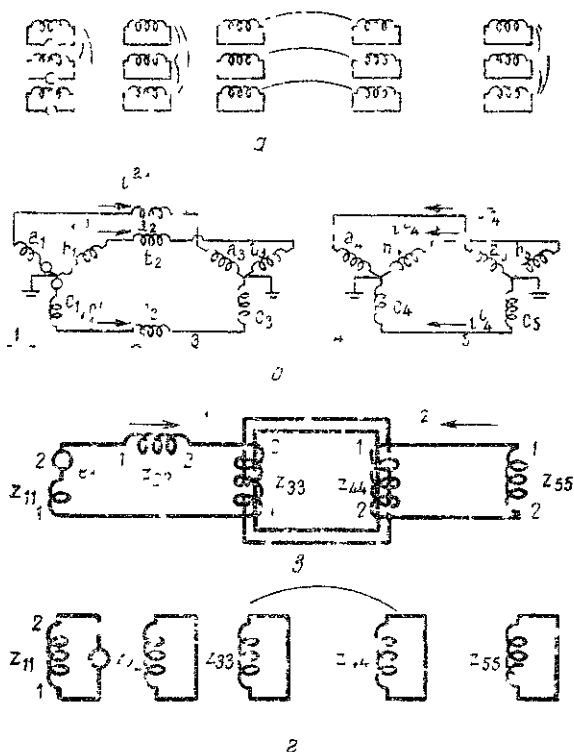


Рис. 19.10.

a — действительная примитивная сеть; *b* — действительная сеть; *в* — компаунд-сеть; *г* — примитивная компаунд-сеть

(или же все отдельные тензоры преобразований являются единичными тензорами). Такая сеть показана на рис. 19.10, б. Соответствующая компаунд-сеть и примитивная контурная сеть показаны на рис. 19.10, в, г.

Индексы $i=1, 2, 3$ компаунд-сети являются *компаунд-индексами* (гл. 9, § 11, II), каждый из которых представляет три отдельных индекса. Например, i стоит вместо a_i, b_i и c_i .

Тензор импеданса примитивной сети равен z

$$z = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & z_{11} & & & & \\ \hline 2 & & z_{22} & & & \\ \hline 3 & & & z_{33} & z_{34} & \\ \hline 4 & & & z_{34} & z_{44} & \\ \hline 5 & & & & & z_{55} \end{array} \end{array} \quad (19.24)$$

а вектор приложенного напряжения

$$e = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline e_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \end{array} \quad (19.25)$$

II. Определим теперь C с учетом компаунд-сети на рис. 19.10, в, представляющей действительную сеть на рис. 19.10, б.

Эта компаунд-сеть имеет два контура, следовательно, предполагается существование двух новых контурных токов $i^{1'}$ и $i^{2'}$. Эти же токи протекают через все последовательные катушки. Примитивная сеть показана на рис. 19.10, г.

Приравнивая старые и новые токи в каждой компаунд-катушке,

$$\begin{array}{l} i^1 = i^{1'} \\ i^2 = i^{1'} \\ i^3 = -i^{1'} \\ i^4 = i^{2'} \\ i^5 = -i^{2'} \end{array} \quad C = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} & 1' & 2' \\ \hline 1 & 1 & \\ \hline 2 & 1 & \\ \hline 3 & -1 & \\ \hline 4 & & 1 \\ \hline 5 & & -1 \end{array} \end{array} \quad (19.26)$$

получаем, что коэффициенты при новых токах представляют тензор преобразования C .

III. Для проверки правильности записи этого тензора C определим обычный тензор преобразования C для исходной сети, показывающий способ соединения 15 катушек сети на рис. 19.10, б в шесть контуров:

| | a'_1 | b'_1 | c'_1 | a'_2 | b'_2 | c'_2 |
|-----------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| a_1 | 1 | | | | | |
| b_1 | | 1 | | | | |
| c_1 | | | 1 | | | |
| a_2 | 1 | | | | | |
| b_2 | | 1 | | | | |
| c_2 | | | 1 | | | |
| a_3 | -1 | | | | | |
| $C = b_3$ | | -1 | | | | |
| c_3 | | | -1 | | | |
| a_4 | | | | 1 | | |
| b_4 | | | | | 1 | |
| c_4 | | | | | | 1 |
| a_5 | | | | -1 | | |
| b_5 | | | | | -1 | |
| c_5 | | | | | | -1 |

| | $1'$ | $2'$ |
|---|------|------|
| 1 | 1 | |
| 2 | 1 | |
| 3 | -1 | |
| 4 | | 1 |
| 5 | | -1 |

$$C =$$

(19.27)

| | | |
|---|---|---|
| 1 | | |
| | 1 | |
| | | 1 |

$$I =$$

Теперь C можно подразделить и представить как компаунд-тензор, каждая компонента которого есть 0 или единичный тензор 1. Компаунд-тензор C показывает, что системы 1, 2, 3 соединены последовательно, так же как системы 4 и 5, что в явном виде изображено на рис. 19.10, в.

IV. Тензор импеданса и вектор приложенного напряжения всей сети находятся по соотношениям $C_i z C$ и $C_i e$ соответственно

$$z' = \begin{array}{c} 1' \\ 2' \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline z_{11} + z_{22} + z_{33} & z_{34} \\ \hline z_{34} & z_{44} + z_{55} \\ \hline \end{array}, \quad (19.28)$$

$$e' = \begin{array}{c} 1' \\ 2' \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline e_1 & 0 \\ \hline \end{array}. \quad (19.29)$$

Токи можно найти как $i' = z'^{-1} e' = y' e'$. Собственные и взаимные адмиттансы отдельных систем (или компаунд-катушек) находят по формуле $C y' C$. Токи в отдельных системах через известные i' находят как $i = C i'$, а напряжения в отдельных системах — как $z C i'$.

Вторую строку и второй столбец можно исключить с помощью формулы редукции, оставив

$$z' = 1' \boxed{z_{11} + z_{22} + z_{33} + z_{34}(z_{44} + z_{55})^{-1}z_{34}} \quad (19.30)$$

У. Подчеркнем, что трехфазную сеть можно анализировать так же, как и любую другую контурную сеть, не вводя компаунд-тензоры, т. е. используя в три раза большее число переменных. Применение компаунд-тензоров и компаунд-сетей просто ускоряет анализ, сокращает число переменных в три раза и делает более ясной физическую картину, но ни в коей мере не уменьшает общее количество окончательных вычислительных операций, необходимых для получения числового ответа, исключая случаи повторяющихся операций.

Главное преимущество применения компаунд-тензоров состоит в полной свободе, допускающей замену отдельных координатных систем одного или нескольких трехфазных устройств путем стандартных автоматических операций, при этом не затрагиваются остальные части сети. Этот вопрос о свободе введения симметричных составляющих или других трехфазных осей более детально разбирается в следующей главе.

12. ПРОХОЖДЕНИЕ КОМПАУНД-ТОКОВ ЧЕРЕЗ КОМПАУНД-СЕТИ

И. В этом параграфе определяется способ, с помощью которого отдельные оси каждого устройства можно заменить «отдельными тензорами преобразования».

Когда обычная катушка z_1 соединена последовательно с другой обычной катушкой z_2 , один и тот же ток i течет как в той, так и в другой катушке, а также через соединяющий их проводник. Однако, когда мы имеем дело с компаунд-катушками, тензоры импеданса z_1 и z_2 можно выразить в различных системах осей, а ток i еще в какой-нибудь системе осей так, что в z_1 будет протекать ток $C_1 i$ (вместо i), в z_2 — ток $C_2 i$, а в соединяющей их системе — ток $C_3 i$ (рис. 19.11). Изменение отдельных координатных систем проявляется как поступление или выход тока из компаунд-катушек.

II. Имеется два варианта появления тока в катушке: 1) он порождается в катушке, т. е. является новой переменной, берущей начало из этой катушки; 2) входит в катушку из других катушек через зажимы.

В любом случае появления тока в катушке и выхода его из катушки его можно изменить преобразованием осей с помощью C .

III. Следовательно, ток i приобретает отдельный тензор преобразования C в трех случаях:

1) при появлении тока в катушке в качестве новой переменной, если катушка имеет тип осей, отличный от выбранных для тока;

2) при попадании в катушку через зажимы, если ток также имеет тип оси, отличный от типа осей катушки;

3) при выходе тока из катушки через ее зажимы в соединяющую систему, имеющую оси, отличные от осей, принятых для этого тока.

Значит, ток приобретает тензор преобразования C каждый раз при появлении системы координат, отличной от выбранной для этого тока.

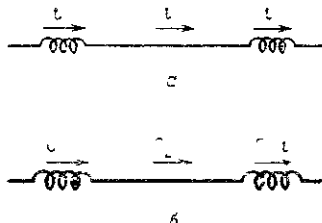


Рис. 19.11.

а — поток в обычных катушках, б — поток в компаунд-катушках.

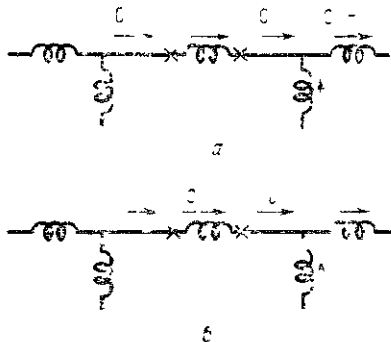


Рис. 19.12. Компаунд-узлы:

а — ток, возникающий в катушке, б — ток, поступающий в катушку

IV. Если это происходит из-за выбора новых переменных, соответствующий тензор C будем называть «катушечным тензором». Если же ток приобретает тензор преобразования при появлении его в сети или при выходе его из сети, то соответствующий тензор преобразования C будем называть «узловым тензором». (В общем случае их можно назвать «отдельными тензорами преобразования» и «трехфазными тензорами»). Более детально эти два типа тензоров рассматриваются в последующих параграфах.

Подчеркнем, что если ток i проникает в компаунд-сети, то выполняются все законы Кирхгофа, сформулированные для компаунд-узлов. Катушечный и узловой тензоры не меняют величины токов; они изменяют лишь отдельные системы координат каждого устройства, и непрерывность тока сохраняется во всей компаунд-сети так же, как и в обычной сети.

Следовательно, единственным отличием анализа обычных сетей и компаунд-сетей является способ определения тока в сети. Это означает, что если i заменяют на \bar{i} с помощью индивидуального тензора преобразования, следует также задать отдельную систему координат.

I. Если координатные оси изменяются так, что ток i' претерпевает изменение Ci' при входе или выходе через зажимы катушки, то оба этих узла зажимов мы будем отмечать на схеме маленькими крестиками (рис. 19.12).

В табл. 19.2 показаны некоторые виды часто встречающихся узловых тензоров. Следует подчеркнуть, что существует множество других трехфазных устройств, для описания которых требуются катушечные тензоры. После того как такой тензор определен для некоторого конкретного устройства, нет нужды вычислять его снова в другом случае. Если устройство используется в некоторой трехфазной системе, этот тензор берут из таблицы и снова используют без каких-либо изменений.

II. Наиболее важным примером компаунд-узла, изменяющего оси координат, является узловое соединение треугольника с линией передачи.

Если ток в трех катушках треугольника равен i' , ток в линии равен $i = C_{\Delta}i'$, где

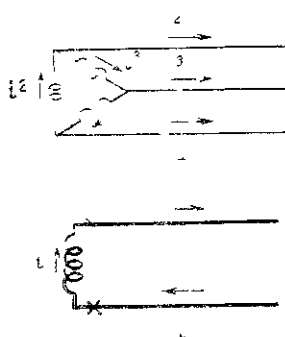


Рис. 19.13. Соединение треугольником:
 σ — ток в треугольнике δ — ток в компаунд-треугольнике

$$i' = \begin{matrix} 1' & 2' & 3' \\ \begin{vmatrix} i^1 & i^2 & i^3 \end{vmatrix} \end{matrix}; \quad (19.31)$$

$$i = \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ \begin{vmatrix} i^2 - i^3 & i^3 - i^1 & i^1 - i^2 \end{vmatrix} \end{matrix}, \quad (19.32)$$

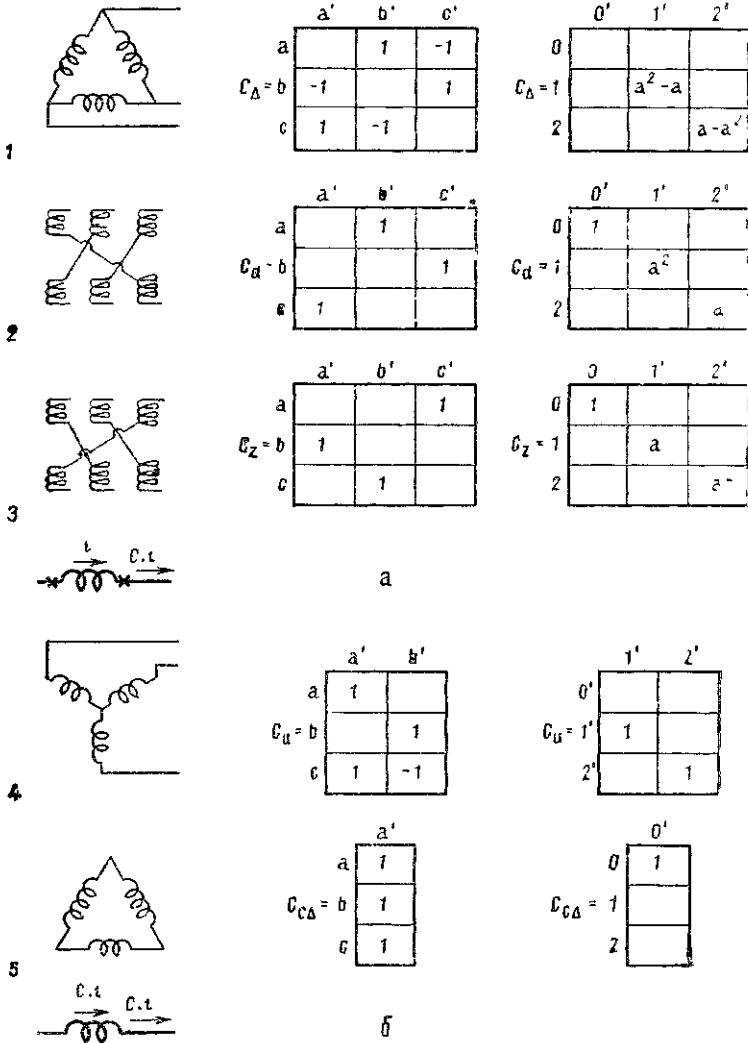
$$C_{\Delta} = 2 \begin{matrix} & 1' & 2' & 3' \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{vmatrix} & & 1 & -1 \\ -1 & & & 1 \\ 1 & -1 & & \end{vmatrix} \end{matrix} \quad (19.33)$$

Преобразование C_{Δ} заменяет токи в треугольнике на токи в линии.

Если компаунд-катушка представляет собой соединенное треугольником устройство, то приходится считать, что в треугольнике образуются новые компаунд-переменные.

III. Можно предположить, что все компаунд-узлы приводят к изменению системы координат, но тензор преобразования в узлах, не помеченных маленькими крестиками, является единичным тензором I.

Отдельные тензоры преобразования для различных типов трехфазных соединений



Первая колонка — в фазных осях; вторая колонка — в последовательных осях; а — узловые тензоры, б — катушечные тензоры.

14. УЗЛОВЫЕ ТЕНЗОРЫ КАК ПЕРЕСТАНОВКИ

I. Поскольку компаунд-узел может порождать преобразование системы координат C , это преобразование системы координат может быть самым различным. В предыдущем примере C представляет картину действительных взаимосвязей. Рассмотрим теперь другой пример, в котором C характеризует перестановку.

В трехфазных сетях обычно соединяют соответственные фазные обмотки. В многообмоточных трансформаторах часто соединяют разнофазные обмотки (рис. 19.14). При зигзагообразном

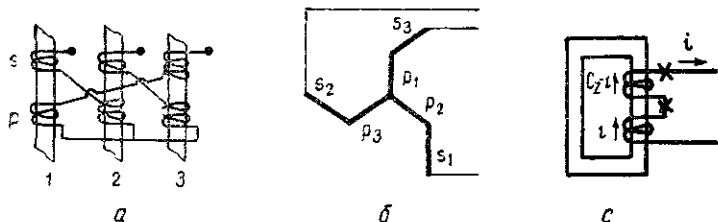


Рис. 19.14 Соединение зигзагом:

a — действительная сеть; b — представление, c — компаунд-сеть.

соединении три катушки вторичных обмоток соединены *последовательно* с тремя катушками первичных обмоток, но не фаза с фазой.

Если i' проходит через вторичную катушку, то через первичную должен проходить ток $C_z i' = i$, где C_z

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} s_1 \quad s_2 \quad s_3 \\ \mathbf{i}' = \begin{array}{|c|c|c|} \hline i^1 & i^2 & i^3 \\ \hline \end{array} \\ \\ \begin{array}{c} p_1 \quad p_2 \quad p_3 \\ \mathbf{i} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline i^3 & i^1 & i^2 \\ \hline \end{array} \end{array} \\ \\
 \begin{array}{c} s_1 \quad s_2 \quad s_3 \\ C_z = \begin{array}{|c|c|c|} \hline p_1 & & 1 \\ \hline p_2 & 1 & \\ \hline p_3 & & 1 \\ \hline \end{array} \end{array}
 \end{array} \quad (19.34)$$

показывает способ соединения фаз.

II. Вместо того чтобы подсоединить *третью фазу* к первой, можно подсоединить *вторую фазу*, как в двойном треугольнике на рис. 19.15, где

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} s_1 \quad s_2 \quad s_3 \\ \mathbf{i}' = \begin{array}{|c|c|c|} \hline i^1 & i^2 & i^3 \\ \hline \end{array} \\ \\ \begin{array}{c} p_1 \quad p_2 \quad p_3 \\ \mathbf{i} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline i^2 & i^3 & i^1 \\ \hline \end{array} \end{array} \\ \\
 \begin{array}{c} s_1 \quad s_2 \quad s_3 \\ C_d = \begin{array}{|c|c|c|} \hline p_1 & & 1 \\ \hline p_2 & & 1 \\ \hline p_3 & 1 & \\ \hline \end{array} \end{array}
 \end{array} \quad (19.35)$$

Когда I' течет в *первичной* катушке, а не во вторичной, тензоры C_z и C_d меняются ролями

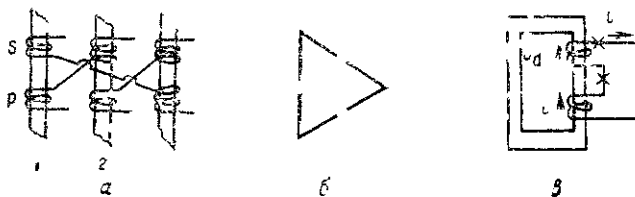


Рис 19.15 Соединение зигзагом
 а — действительное соединение б — представление в — коплануид катушек

15 УЗЛОВОЙ ТЕНЗОР ИМПЕДАНСА ЗАЗЕМЛЕНИЯ

I Компонд узел может ввести *сингулярное преобразование*, сокращающее число осей (В треугольнике число осей не меняется) Примером является *импеданс заземления* при отсутствии токов замыкания В вершине звезды три внешних тока I' заменяются одним током i (текущим через импеданс заземления) при помощи $C_g I'$, где

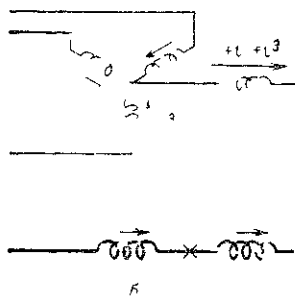


Рис 19.16 Заземление
 а — импеданс заземления о — компанд катушки

$$I' = \begin{matrix} & 1 & 2 & 3 \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \end{matrix}$$

$$i = \begin{matrix} & g \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \end{matrix} \quad (19.30)$$

$$C_g = g \begin{matrix} & 1 & 2 & 3 \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \end{matrix}$$

Следует отметить, что при соединении треугольником ток I' в катушках треугольника предполагается известным Для импеданса заземления (в случае отсутствия токов заземления) ток предполагается известным *вне* импеданса заземления

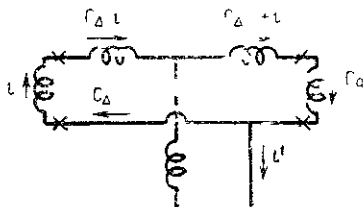


Рис 19.17 Дельта-ток через заземление

II Интересно, что ток i' , порождаемый в треугольнике, обращается в нуль, проходя через импеданс заземления, так как в нем ток равен $C_g C_{\Delta} i'$ (C_{Δ} действует, когда i' покидает треугольник, а C_g действует на входе в заземление (рис 19 17)) и

$$C_g C_{\Delta} = 0, \quad (19.37)$$

так как

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

III Как показано на рис 19 17, в компаунд-сетях импеданс заземления и звезда всегда соединены *последовательно*. Две компаунд-катушки, соединенные последовательно, можно заметить одной катушкой, тензор импеданса которой равен сумме импедансов катушек

Найдем решение для сети из этих двух последовательно соединенных катушек (рис 19 18), рассматривая ее как обычную сеть (или как компаунд-сеть).

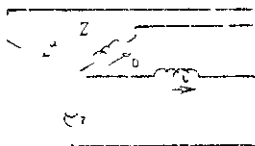


Рис 19 18 Заземленная звезда

Тензор импеданса z примитивной сети равен

$$z = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c & g \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ g \end{matrix} & \begin{bmatrix} Z_{aa} & Z_{ab} & Z_{ac} \\ Z_{ba} & Z_{bb} & Z_{bc} \\ Z_{ca} & Z_{cb} & Z_{cc} \\ & & & Z_g \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} & \begin{matrix} m & g \end{matrix} \\ \begin{matrix} m \\ g \end{matrix} & \begin{bmatrix} z_1 & \\ & z_2 \end{bmatrix} \end{matrix}, \quad (19.38)$$

а тензор преобразования

$$\begin{aligned}
 i^a &= i^{a'} \\
 i^b &= i^{b'} \\
 i^c &= i^{c'} \\
 i^g &= i^{a'} + i^{b'} + i^{c'}
 \end{aligned}
 \quad C = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a' & b' & c' \\ \hline a & 1 & \\ \hline b & & 1 \\ \hline c & & & 1 \\ \hline g & 1 & 1 & 1 \end{array} \\ = \begin{array}{c} m' \\ \hline m \\ \hline g \\ \hline C_g \end{array} \end{array} \quad (19.39)$$

Результирующий тензор импеданса равен $C_t z C$

$$\mathbf{z}' = \mathbf{z}_1 + C_g z_2 C_g = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a' & b' & c' \\ \hline a' & Z_{aa} + Z_g & Z_{ab} + Z_g & Z_{ac} + Z_g \\ \hline b' & Z_{ba} + Z_g & Z_{bb} + Z_g & Z_{bc} + Z_g \\ \hline c' & Z_{ca} + Z_g & Z_{cb} + Z_g & Z_{cc} + Z_g \end{array} \end{array} \quad (19.40)$$

Следовательно, импеданс звезды и импеданс заземления можно заменить одной компаунд-катушкой с тензором импеданса z' . Эта компаунд-катушка представляет эквивалентную заземленную звезду без импеданса заземления, собственные и взаимные импедансы которой увеличены на Z_g из-за наличия импеданса заземления (рис. 19.19).

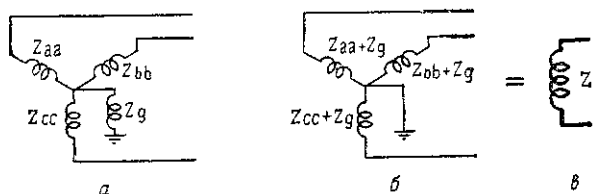


Рис. 19.19.

а — заземленная звезда; б — эквивалентная звезда; в — компаунд-катушка.

IV. Если имеется несколько проводов заземления, соединенных параллельно (рис. 19.20, а), то один из них выбирается как импеданс заземления с узловым тензором C_g , а остальные рассматриваются как одна компаунд-катушка, соединенная параллельно с импедансом заземления.

В этой параллельной цепи вводится новая переменная — ток i^1 с компонентами i^p и i^q , протекающий в дополнительном компаунд-контуре (рис. 19.20, б). Предполагается, что в остальной части системы шунтирующий ток i^1 не проходит.

16. ПРИМЕР ПРИМЕНЕНИЯ УЗЛОВЫХ ТЕНЗОРОВ

I. В качестве примера узлового тензора рассмотрим сеть, содержащую семь трехфазных устройств (рис. 19.21, а).

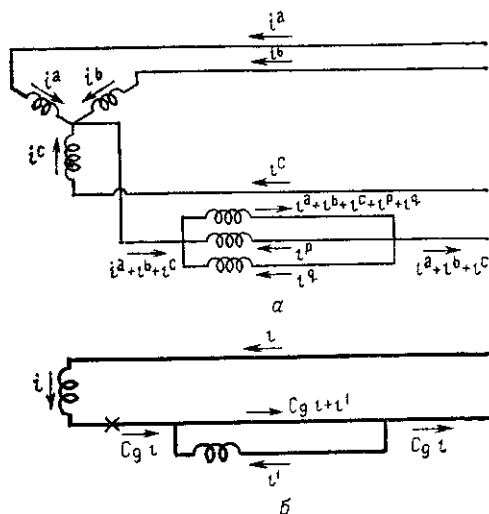


Рис. 19.20.

а — три провода заземления; б — компаунд-сеть заземления.

Примитивная компаунд-сеть (рис. 19.21, б) имеет семь катушек (по числу трехфазных устройств), соединенных в одну общую.

Геометрическими объектами сети являются

$$e = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \end{array}, \quad (19.41)$$

$$z = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline z_1 & & & & & & \\ \hline & z_2 & & & & & \\ \hline & & z_3 & & & & z_{37} \\ \hline & & & z_4 & & & \\ \hline & & & & z_5 & & \\ \hline & & & & & z_6 & \\ \hline & & z_{37} & & & & z_7 \\ \hline \end{array} \end{array}, \quad (19.42)$$

Между линией передачи 3 и проводом заземления 7 предполагается наличие индуктивной связи.

II. В компаунд-сети имеется три закрытых контура, поэтому выбирают три новых тока. Два из них $i^{1'}$ и $i^{2'}$ проходят, например, через устройства 1 и 2, соединенные треугольником, а

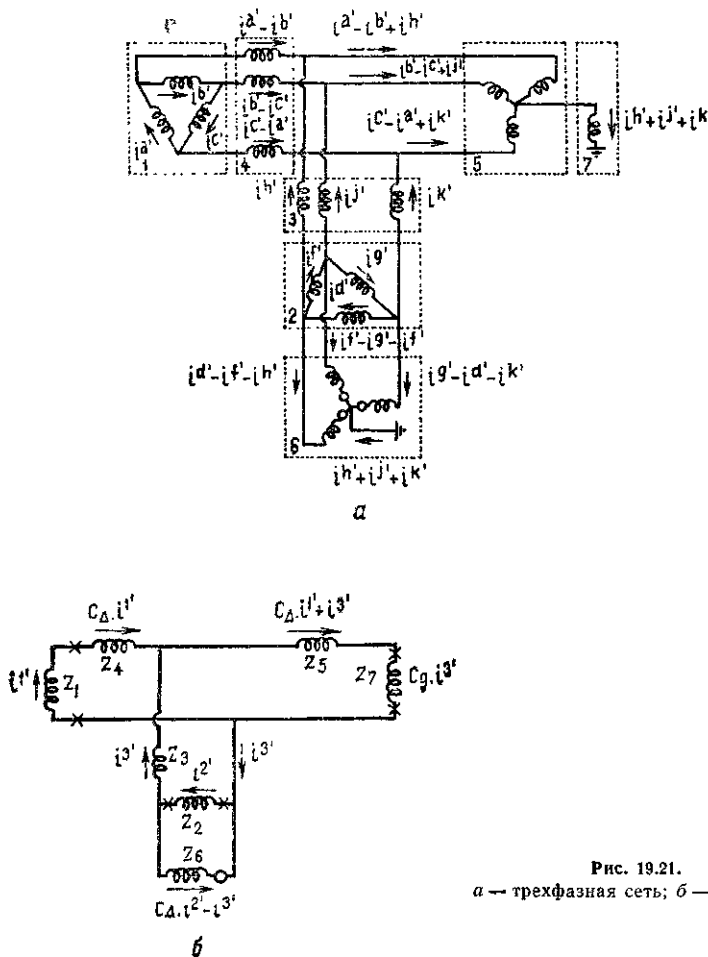


Рис. 19.21.
а — трехфазная сеть; б — компаунд-сеть

третий ток $i^{3'}$ можно произвольно приписать любой ветви, например 3.

Соответствующие девять токов исходной сети показаны на рис. 19.21, а как i^a, i^b, i^c в сети 1; i^d, i^e, i^f в сети 2; i^g, i^h, i^k в сети 3. Предполагается, что эти девять токов проходят во всех катушках трех устройств.

Токи во всех катушках компаунд-сети показаны на рис. 19.21, б. Они выражены через новые токи $i^{1'}$, $i^{2'}$ и $i^{3'}$, а также через узловые тензоры преобразования C_{Δ} и C_g . В импедансе заземления z_7 ток равен $C_g \cdot C_{\Delta} \cdot i^{1'}$, т. е. равен 0.

III. Получим теперь тензор преобразования C компаунд-сети, приравняв старые и новые токи в компаунд-катушках:

$$\begin{array}{rcl}
 i^1 = & i^{1'} & 1 \\
 i^2 = & i^{2'} & 2 \\
 i^3 = & i^{3'} & 3 \\
 i^4 = C_{\Delta} i^{1'} & & C = 4 \\
 i^5 = C_{\Delta} i^{1'} & + i^{3'} & 5 \\
 i^6 = & C_{\Delta} i^{2'} - i^{3'} & 6 \\
 i^7 = & C_g i^{3'} & 7
 \end{array}
 \begin{array}{|c|c|c|}
 \hline
 & 1' & 2' & 3' \\
 \hline
 1 & I & & \\
 \hline
 2 & & I & \\
 \hline
 3 & & & I \\
 \hline
 4 & C_{\Delta} & & \\
 \hline
 5 & C_{\Delta} & & I \\
 \hline
 6 & & C_{\Delta} & -I \\
 \hline
 7 & & & C_g \\
 \hline
 \end{array}
 \quad (19.43)$$

Правильность записи этого компаунд-тензора преобразования можно проверить, построив обычный тензор преобразования (см. рис. 19.21, а), имеющий 19 строк и 9 столбцов.

Короче говоря, различные C_{Δ} и I , появившиеся в компаунд-тензоре C , не эквивалентны друг другу, поскольку каждый из них имеет различные компаунд-индексы, а также отдельные индексы.

Этими признаками они и различаются между собой.

Так как единственной операцией, выполняемой при участии C , является умножение (C сам по себе не преобразуется), отличающиеся индексы можно опустить. Если же тензоры C_{Δ} приведены к разным типам отдельных сетей, абсолютно необходимо отличать тензоры C_{Δ} и I , относящиеся к разным устройствам.

IV. Результирующий тензор импеданса z' найдем по соотношению $C_i^* z C$

$$\begin{array}{r}
 \mathbf{z}' = \begin{array}{|c|c|c|}
 \hline
 & 1' & 2' & 3' \\
 \hline
 1' & z_1 + C_{\Delta f}^* z_4 C_{\Delta} + C_{\Delta f}^* z_5 C_{\Delta} & 0 & C_{\Delta f}^* z_5 \\
 \hline
 2' & 0 & z_2 + C_{\Delta f}^* z_6 C_{\Delta} & -C_{\Delta f}^* z_6 \\
 \hline
 3' & z_5 C_{\Delta} & -z_6 C_{\Delta} & z_3 + z_5 + z_6 + z_{37} C_g + C_{g f}^* z_{37} + C_{g f}^* z_7 C_g \\
 \hline
 \end{array}
 \end{array}
 \quad (19.44)$$

Вектор приложенных напряжений по $C_t^* \cdot e$ равен

$$e' = \begin{matrix} 1' & 2' & 3' \\ \hline 0 & C_{\Delta t}^* \cdot e & -e \end{matrix} \quad (19.45)$$

Токи находят из $i' = z'^{-1} \cdot e'$. Токи в отдельных катушках равны Ci' , а индуцированные напряжения — $z \cdot C \cdot i'$.

17. «КАТУШЕЧНЫЙ» ТЕНЗОР ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

I. В предыдущем примере новые переменные $i^{1'}$, $i^{2'}$ и $i^{3'}$ выбирались в соответствующих обмотках новой сети, при этом повторялось распределение токов в обмотках примитивной сети. Это означает, что три компоненты тока $i^{1'}$, а именно $i^{a'}$, $i^{b'}$ и $i^{c'}$, проходят в тех же катушках, что и i^a , i^b и i^c в примитивной сети.

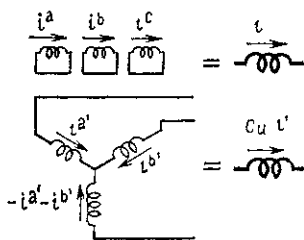


Рис. 19.22. Незаземленная звезда.

II. Однако часто для нового тока $i^{1'}$ необходимо выбрать другие компоненты, например, в *незаземленной* звезде (рис. 19.22). Новый ток $i^{1'}$, рассматриваемый как переменная, имеет лишь две компоненты $i^{a'}$ и $i^{b'}$ вместо трех $i^{a'}$, $i^{b'}$, $i^{c'}$.

Другими словами, новая переменная $i^{1'}$ имеется не во всех обмотках компаунд-катушки, а лишь в части их. Поэтому в трех катушках компаунд-катушки протекает ток $C_u \cdot i^{1'} = i$ вместо выбранной переменной $i^{1'}$, причем

$$i^{1'} = \begin{matrix} a' & b' \\ \hline i^{a'} & i^{b'} \end{matrix} \quad C_u = \begin{matrix} a' & b' \\ a & \begin{matrix} | & \\ 1 & \end{matrix} \\ b & \begin{matrix} | & \\ & 1 \end{matrix} \\ c & \begin{matrix} | & \\ -1 & -1 \end{matrix} \end{matrix} \quad (19.46)$$

$$i = \begin{matrix} a & b & c \\ \hline i^{a'} & i^{b'} & -i^{a'} - i^{b'} \end{matrix}$$

Таким образом, при выборе новых переменных одной из них часто должен быть ток в компаунд-катушке, соответствующей незаземленной звезде, как и для случая соединения треугольником. Однако в соединении треугольником новая переменная — ток $i^{1'}$ проходит через все катушки треугольника (и в том же

порядке), как в примитивной сети, тогда как в незаземленной звезде новая переменная i' покрывает лишь часть звезды. Следовательно, во всех катушках звезды протекает ток $C \cdot i'$. Этот же ток проходит в отводах звезды, поэтому ее узлы не помечают крестиками.

III. Частным случаем незаземленной звезды является *открытый треугольник* (рис. 19.23). Его можно рассматривать как незаземленную звезду, у которой импеданс Z_{cc} равен нулю.

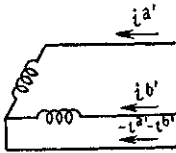


Рис. 19.23. Открытый треугольник.

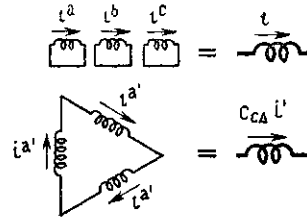


Рис. 19.24. Закрытый треугольник.

IV. Другим примером катушечного тензора является *закрытый треугольник* в преобразователе (рис. 19.24), где новая переменная i' имеет лишь одну компоненту $i^{a'}$, и, следовательно, в трех катушках компаунд-катушки есть ток $C_{c\Delta} \cdot i' = i$, где

$$i' = \begin{bmatrix} a' \\ i^{a'} \end{bmatrix} \quad C_{c\Delta} = \begin{bmatrix} a & 1 \\ b & 1 \\ c & 1 \end{bmatrix} \quad (19.47)$$

$$i = \begin{bmatrix} a & b & c \\ i^{a'} & i^{a'} & i^{a'} \end{bmatrix}$$

В следующей главе будут более подробно рассмотрены сети с катушечными тензорами преобразования.

Если все сети рассматриваются как *полные*, то катушечные тензоры не являются сингулярными.

18. ПРЕНЕБРЕЖЕНИЕ НАМАГНИЧИВАЮЩИМ ТОКОМ

I. Любой прием, экономящий время анализа и введенный для простых сетей, обычно можно применить и для компаунд-сетей. Например, если в компаунд-сеть включены многообмоточные компаунд-трансформаторы, их намагничивающим током можно пренебречь, повторяя точно те же шаги, которые были предприняты для обычного многообмоточного трансформатора (см. гл. 11), а именно:

1) составляют тензор импеданса z примитивной компаунд-сети, применяя *импеданс потерь* z_{1-2} для компаунд-трансформатора, как показано в уравнении (19.21);

2) составляют тензор преобразования C_1 для компаунд-сети так же, как в предыдущем разделе;

3) пренебрегают намагничивающим током, учитывая это с помощью тензора преобразования C_2 ;

4) их произведение $C_1 C_2$ дает окончательный тензор преобразования C_3 ;

5) тогда $C_3^* z C_3$ дает тензор импеданса z' новой компаунд-сети и т. д.

II. Второй тензор преобразования C_2 , учитывающий пренебрежение намагничивающим током, составляется следующим образом:

1) уравнение принуждающих связей через *старые* токи можно записать так:

$$n_1 i^1 + n_2 i^2 + \dots = 0, \quad (19.48)$$

где n_1 — диагональный тензор валентности два, задающий число витков каждой катушки первой сети и т. д.;

2) *старые* токи в уравнении принуждающих связей заменяются новыми токами из $i = C_1 i^1$;

3) исключают столько токов, сколько имеется уравнений принуждающих связей;

4) соотношение $i = C_2 i^1$ дает C_2 .

СИММЕТРИЧНЫЕ СОСТАВЛЯЮЩИЕ

1. УНИВЕРСАЛИЗМ КОМПАУНД-СЕТЕЙ

I. Если импедансы трехфазных устройств сбалансированы, то, как показано в гл. 13, их тензоры импеданса можно привести к диагональной форме тензором последовательности C_s . Поэтому при соединении *сбалансированных* трехфазных устройств в одну сеть *сбалансированным* способом результирующее z сети принимает более простой вид, если отдельные z выражены в последовательных осях.

Таким образом, при получении компаунд-сети любой трехфазной системы нет никакой разницы в том, относительно каких осей представлены отдельные трехфазные устройства: осей a, b, c цепи или последовательных осей 0, 1, 2. В любом случае сама компаунд-сеть и полный анализ компаунд-сети одинаковы. Разница лишь в значениях отдельных z и C (катушечных и узловых тензоров) на осях обоих типов.

Поэтому содержание гл. 19 в равной степени относится к устройствам, которые рассматриваются относительно фазных и последовательных осей.

II. Тензоры импеданса трех катушек (сбалансированных или несбалансированных), выраженные в последовательных осях 0, 1, 2, уже приводились в гл. 13.

В дополнение к тензорам, выраженным в осях фаз a, b, c , необходимо лишь получить z других типов трехфазных устройств и различных катушечных и узловых тензоров относительно последовательных осей 0, 1, 2.

Следует заметить, что *нет необходимости однажды полученные тензоры импеданса z и тензор преобразования C для отдельного устройства частного типа относительно частной системы координат получать заново всякий раз, когда устройство используется в какой-либо трехфазной системе.* По этой причине устройство рассматривается как единая компаунд-катушка, а внутренние соединения совершенно не принимаются во внимание.

Поэтому при наличии таблиц для z и C *анализ* трехфазных систем сводится к анализу контурных (узловых или ортогональных) компаунд-сетей, а частные трехфазные системы коорди-

нат (скажем, симметричные составляющие или любые другие системы координат) исчезают из поля зрения. Они снова появляются при *стандартных* действиях, которые, однако, может выполнить тот, кто даже не знаком с симметричными составляющими.

III. Если сеть сбалансирована и для отдельных устройств используется последовательность осей, результирующий компаунд-тензор z' целой системы имеет несколько строк и столбцов, причем каждая компонента является тензором с тремя осями по 0, 1 и 2 (см. гл. 19). Если перестроить результирующую матрицу z' таким образом, чтобы все одинаковые последовательные оси были собраны вместе (т. е. все 0-оси вместе и т. д.), можно обнаружить, что *тензоры, содержащие одни и те же последовательные оси, не зависят друг от друга и не содержат ни одного взаимного члена*. Эквивалентные сети, соответствующие каждому независимому тензору, называются «сетями последовательностей». (Устройство сетей, эквивалентных тензору валентности два, в этой книге не рассматривается.)

2. ТЕНЗОРЫ ИМПЕДАНСА В ОСЯХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

I. Тензор z трех различных катушек в осях фаз и осях последовательности дается соответственно уравнениями (13.18) и (13.21). Для трех одинаковых катушек с симметричными взаимными импедансами уравнения приводятся к более простой форме. Например, некоторые из таких более простых форм уравнений представлены еще раз во втором столбце табл. 19.1.

II. Когда трехфазные многообмоточные трансформаторы сбалансированы, а намагничивающие токи пренебрежимо малы, тензор z_{p-q} потерь на сопротивлении имеет диагональную матрицу с идентичными компонентами. Следовательно, по соотношению $C_{st}^* z_{p-q} C_s$

$$z_{p-q} = \begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|c|} \hline a & b & c \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|c|} \hline z_{p-q} & & \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|c|} \hline b & & \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|c|} \hline & z_{p-q} & \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|c|} \hline c & & \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & z_{p-q} \\ \hline \end{array} \end{array} = 1 \begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 2 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|c|} \hline z_{p-q} & & \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|c|} \hline & z_{p-q} & \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & z_{p-q} \\ \hline \end{array} \end{array} \quad (20.1)$$

Точно так же тензор виткового отношения по $C_s^{-1} n_p C_s$ равен

$$n_p = \begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|c|} \hline a' & b' & c' \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|c|} \hline n_p & & \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|c|} \hline & n_p & \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & n_p \\ \hline \end{array} \end{array} = 1 \begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0' & 1' & 2' \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|c|} \hline n_p & & \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|c|} \hline & n_p & \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & n_p \\ \hline \end{array} \end{array} \quad (20.2)$$

В общем случае \mathbf{n}_p содержит комплексные компоненты относительно последовательных осей.

III. Для многих трехфазных устройств тензоры импеданса относительно последовательных осей не рассчитывают по соотношению $\mathbf{C}_{st}^* z \mathbf{C}_s$ для тензоров, представленных в фазных осях, а определяют в отдельных испытаниях или исходя из конструктивных констант устройства. Для вращающихся или неподвижных устройств соответственно они обычно имеют следующий вид:

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc}
 & 0 & 1 & 2 \\
 \hline
 0 & Z_0 & & \\
 \hline
 z = 1 & & Z_1 & \\
 \hline
 2 & & & Z_2
 \end{array}
 , \quad
 \begin{array}{ccc}
 & 1 & 2 & 3 \\
 \hline
 0 & Z_0 & & \\
 \hline
 z = 1 & & Z_1 & \\
 \hline
 2 & & & Z_1
 \end{array}
 \end{array}
 \quad (20.3)$$

3. УЗЛОВЫЕ И КАТУШЕЧНЫЕ ТЕНЗОРЫ В ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ОСЯХ

I. Поскольку *узловые тензоры* \mathbf{C}_j — несингулярные (квадратные), к последовательным осям они преобразуются по формуле $\mathbf{C}_s^{-1} \mathbf{C}_j \mathbf{C}_s$. Для треугольника и двух типов зигзагообразных соединений они приведены в табл. 19.2, а. Отметим, что ток нулевой последовательности не может выйти из треугольника.

Интересно также обнаружить, что при симметричных соединениях трехфазных устройств соответствующий тензор преобразования, выраженный в последовательных осях, также имеет диагональную форму. Таким образом, можно установить, что последовательный тензор \mathbf{C}_s приводит к диагональному виду:

- 1) z сбалансированного импеданса;
- 2) тензор \mathbf{C} симметричного соединения.

II. *Катушечные тензоры* \mathbf{C}_c — сингулярные, поэтому не допускается неразборчивое употребление соотношения $\mathbf{C}_s^{-1} \mathbf{C}_c \mathbf{C}_s$. Одним из способов преобразования сингулярного катушечного тензора к последовательным осям является следующий:

- 1) выразить сингулярное преобразование $\mathbf{i} = \mathbf{C} \mathbf{i}'$ как систему «уравнений связей», содержащих фазные токи;
- 2) в уравнениях связей заменить все фазные токи последовательными токами;
- 3) заменить уравнения связей (содержащие теперь последовательные токи) преобразованием $\mathbf{i} = \mathbf{C} \mathbf{i}'$.

Коэффициенты дают искомым катушечный тензор, выраженный в последовательных осях.

III. В качестве примера рассмотрим катушечный тензор *незаземленной звезды* (уравнение (19.46))

$$\begin{aligned}
 i^a &= i^{a'} \\
 i^b &= i^{b'} \\
 i^c &= -i^{a'} - i^{b'}
 \end{aligned}
 \quad C_u = \mathbf{b}
 \quad \begin{array}{c}
 \begin{array}{cc}
 & \begin{array}{c} a' \quad b' \end{array} \\
 \begin{array}{c} a \\ c \end{array} & \begin{array}{|c|c|}
 \hline
 1 & \\
 \hline
 \\ & 1 \\
 \hline
 -1 & 1 \\
 \hline
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}
 \quad (20.4)$$

Преобразование $\mathbf{i} = C_u \mathbf{i}'$ подставляется в следующее «уравнение связи»:

$$i^a + i^b + i^c = 0. \quad (20.5)$$

Заменяя фазные токи токами последовательности, имеем

$$\frac{1}{\sqrt{3}} [(i^0 + i^1 + i^2) + (i^0 + a^2 i^1 + a i^2) + (i^0 + a i^1 + a^2 i^2)] = 0$$

или $\sqrt{3} i^0 = 0$. Отсюда получаем уравнение связи в терминах токов последовательности

$$i^0 = 0, \quad (20.6)$$

что эквивалентно следующему преобразованию $\mathbf{i} = C_u \mathbf{i}'$:

$$\begin{aligned}
 i^0 &= 0 \\
 i^1 &= i^{1'} \\
 i^2 &= i^{2'}
 \end{aligned}
 \quad C_u = \mathbf{1}
 \quad \begin{array}{c}
 \begin{array}{cc}
 & \begin{array}{c} 1' \quad 2' \end{array} \\
 \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} & \begin{array}{|c|c|}
 \hline
 & \\
 \hline
 1 & \\
 \hline
 & 1 \\
 \hline
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}
 \quad (20.7)$$

Этот новый C_u является последовательным эквивалентом фазному C_u уравнения (19.46).

Следует заметить, что *наличие тока нулевой последовательности, протекающего в заземленной звезде* (или открытом треугольнике), *не предполагается*.

IV. Катушечные тензоры *закрытого треугольника* в фазных и последовательных осях приведены в табл. 19.2.

Особо следует подчеркнуть, что в последовательных осях вводится такое же число новых переменных, как и в фазных осях. Поэтому катушечные тензоры имеют одинаковый вид и в тех и в других осях. В обычных методах анализа практически всегда вводится более длинная последовательность переменных, чем это действительно необходимо, отчего анализ становится лишь более запутанным.

4. ПРИМЕР С ОСЯМИ ДВУХ ТИПОВ

I. Возьмем для примера z' (рис. 20.1, а), выраженный в осях обоих типов. Компануд-сеть (рис. 20.1, б) и ее анализ одинаковы для трехфазных осей обоих типов.

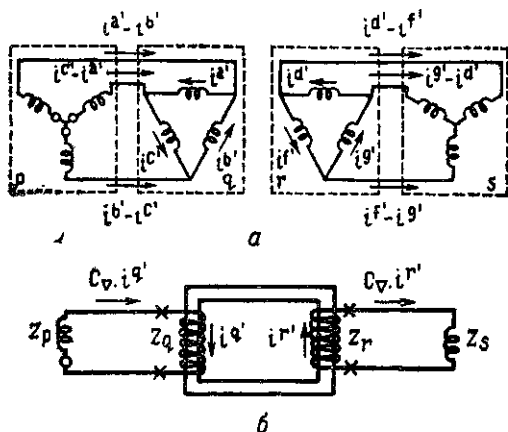


Рис. 20.1.

а — данная сеть; б — компануд-сеть.

II. z и e примитивной сети равны

$$z = \begin{array}{c|cccc} & p & q & r & s \\ \hline p & z_p & & & \\ q & & z_{q-r} & & \\ r & & z_{q-r} & & \\ s & & & & z_s \end{array}, \quad (20.8)$$

$$e = \begin{array}{c|cccc} & p & q & r & s \\ \hline p & e_p & & & \\ q & & & & \\ r & & & & \\ s & & & & \end{array} \quad (20.9)$$

Тензор преобразования можно записать как

$$\begin{array}{l} i^p = C_{\Delta} i^{q'} \\ i^q = i^{q'} \\ i^r = i^{r'} \\ i^s = C_{\Delta} i^{r'} \end{array} \quad C_{\Delta} = \begin{array}{c|cc} & q' & r' \\ \hline p & C_{\Delta} & \\ q & I & \\ r & & I \\ s & & C_{\Delta} \end{array} \quad (20.10)$$

Чтобы исключить намагничивающие токи, устанавливается уравнение связи

$$n_q i^q + n_r i^r = 0. \quad (20.11)$$

Заменив старые токи новыми из уравнения (20.10)

$$n_q i^{q'} + n_r i^{r'} = 0$$

и исключив $i^{q'}$, имеем

$$i^{q'} = -n_q^{-1} n_r i^{r'} = -n i^{r'},$$

$$C_2 = \begin{matrix} & & r' \\ q' & \begin{bmatrix} -n \\ I \end{bmatrix} \\ r' & \end{matrix}, \quad C_1 C_2 = C = \begin{matrix} & & & r' \\ p & \begin{bmatrix} -C_\Delta n \\ -n \\ I \\ C_\Delta \end{bmatrix} \\ q & \\ r & \\ s & \end{matrix} \quad (20.12)$$

Окончательный тензор импеданса z' находят по соотношению $C_t^* z C$

$$z' = r' \begin{matrix} & & & r' \\ & & \begin{bmatrix} n_t^* C_{\Delta t}^* z_p C_\Delta n - n_t^* z_{q-r} - z_{q-r} n + C_{\Delta t}^* z_s C_\Delta \end{bmatrix} \\ & & & \end{matrix}, \quad (20.13)$$

$$e' = \begin{matrix} & & r' \\ & & \begin{bmatrix} -n_t^* C_{\Delta t}^* e_p \end{bmatrix} \\ & & \end{matrix} \quad (20.14)$$

Если витковое отношение для каждой фазы одинаково, т. е. $n = nI$,

$$z' = r' \begin{matrix} & & & r' \\ & & \begin{bmatrix} C_{\Delta t}^* (n^2 z_p + z_s) C_\Delta - 2n z_{q-r} \end{bmatrix} \\ & & & \end{matrix} \quad (20.15)$$

III. Предположим теперь, что заданы следующие величины:

$$z_p = \begin{matrix} & a & b & c \\ a & \begin{bmatrix} Z_p & & \\ & Z_p & \\ & & Z_p \end{bmatrix} \\ b & \\ c & \end{matrix} = 1 \begin{matrix} & 0 & 1 & 2 \\ 0 & \begin{bmatrix} Z_p & & \\ & Z_p & \\ & & Z_p \end{bmatrix} \\ 1 & \\ 2 & \end{matrix}, \quad (20.16)$$

$$z_s = \begin{matrix} & a & b & c \\ a & \begin{bmatrix} Z_a & & \\ & Z_b & \\ & & Z_c \end{bmatrix} \\ b & \\ c & \end{matrix} = 1 \begin{matrix} & 0 & 1 & 2 \\ 0 & \begin{bmatrix} Z_0 & Z_2 & Z_1 \\ Z_1 & Z_0 & Z_2 \\ Z_2 & Z_1 & Z_0 \end{bmatrix} \\ 1 & \\ 2 & \end{matrix}, \quad (20.17)$$

$$z_{q-r} = \begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|c|} \hline a & b & c \\ \hline Z_{q-r} & & \\ \hline b & Z_{q-r} & \\ \hline c & & Z_{q-r} \\ \hline \end{array} \\ = 1 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 2 \\ \hline Z_{q-r} & & \\ \hline & Z_{q-r} & \\ \hline & & Z_{q-r} \\ \hline \end{array} \end{array}, \quad (20.18)$$

$$C_{\Delta} = \begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|c|} \hline a' & b' & c' \\ \hline & 1 & -1 \\ \hline -1 & & 1 \\ \hline 1 & -1 & \\ \hline \end{array} \\ = 1 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0' & 1' & 2' \\ \hline & & \\ \hline & a^2 - a & \\ \hline & & a - a^2 \\ \hline \end{array} \end{array}, \quad (20.19)$$

$$e_p = \begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|c|} \hline a & b & c \\ \hline e_p & a^2 e_p & a e_p \\ \hline \end{array} \\ = \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 2 \\ \hline \sqrt{3} e_p & & \\ \hline \end{array} \end{array} \quad (20.20)$$

IV. Тогда тензоры импеданса по уравнению (20.15) равны

$$z' = \begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|c|} \hline a' & b' & c' \\ \hline Z_b + Z_c + 2n^2 Z_p - \\ -2nZ_{q-r} & -Z_c - Z_p & -Z_b - Z_p \\ \hline -Z_c - Z_p & Z_a + Z_c + 2n^2 Z_p - \\ -2nZ_{q-r} & -Z_a - Z_p & \\ \hline -Z_b - Z_p & -Z_a - Z_p & Z_a + Z_b + 2n^2 Z_p - \\ -2nZ_{q-r} & & \\ \hline \end{array} \end{array} \quad (20.21)$$

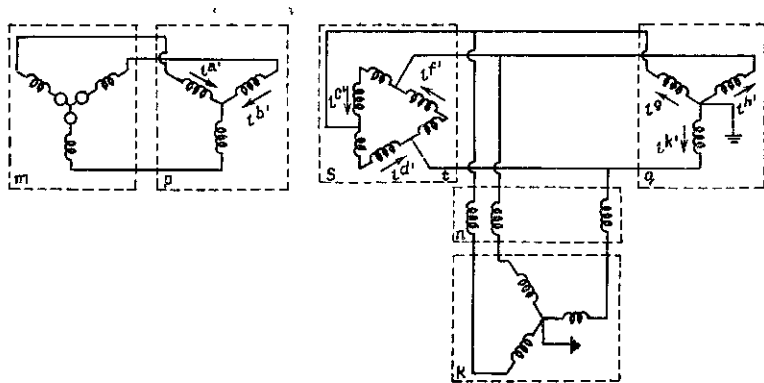
$$z' = \begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0' & 1' & 2' \\ \hline -2nZ_{q-r} & & \\ \hline & 3Z_0 + 3n^2 Z_p - 2nZ_{q-r} & -3Z_2 \\ \hline & -3Z_1 & 3Z_0 + 3n^2 Z_p - 2nZ_{q-r} \\ \hline \end{array} \end{array}, \quad (20.22)$$

а векторы приложенного напряжения по уравнению (20.14) равны

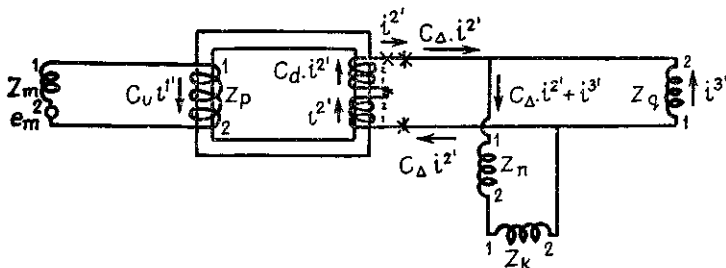
$$e' = \begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|} \hline a' & n(a^2 - a)e_p \\ \hline b' & n(a - 1)e_p \\ \hline c' & n(1 - a^2)e_p \\ \hline \end{array} \\ = \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|} \hline 0' & \\ \hline 1' & 3(a - a^2)ne_p \\ \hline 2' & \\ \hline \end{array} \end{array} \quad (20.23)$$

5. МНОГООБОМОТЧНЫЕ КОМПАУНД-ТРАНСФОРМАТОРЫ

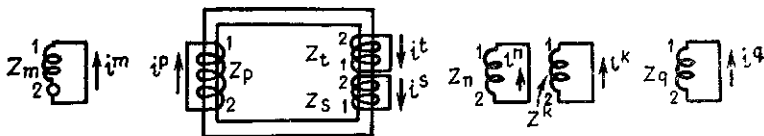
I. Рассмотрим сеть (рис. 20.2, а), содержащую вписанный треугольный трехобмоточный трансформатор (см. рис. 10.3). Компаунд-сеть содержит трехобмоточный компаунд-трансформатор.



а



б



в

Рис. 20.2.

а — данная сеть; б — компаунд-сеть, в — примитивная компаунд-сеть

Примитивная компаунд-сеть (рис. 20.2, в) содержит семь катушек. Тензор импеданса и вектор приложенного напряжения этой сети равны

| | m | p | s | t | n | k | q |
|-------|-------|-----------|-----------|-----------|-------|-------|-------|
| m | z_m | | | | | | |
| p | | | z_{p-s} | z_{p-t} | | | |
| s | | z_{p-s} | | z_{s-t} | | | |
| z = t | | z_{p-t} | z_{s-t} | | | | |
| n | | | | | z_n | | |
| k | | | | | | z_k | |
| q | | | | | | | z_q |

(20.24)

| | m | p | s | t | n | k | q |
|-----|-------|---|---|---|---|---|---|
| e = | e_m | | | | | | |

(20.25)

Отдельные трехфазные устройства z_m и другие можно представить как в фазных a, b, c , так и в последовательных $0, 1, 2$ осях.

II. Заметим, что в компаунд-трансформаторе:

1) вторичная z_s и третичная z_t обмотки соединены последовательно;

2) компаунд-узлы третичной обмотки показывают, что фазные соединения взаимно заменяются с помощью C_d ;

3) вторичная и третичная обмотки *вместе* образуют треугольник, поэтому *в каждой из них* имеются скрещивающиеся компаунд-узлы треугольника (три скрещивающихся линии на рис. 20.2, б).

III. Поскольку имеются три компаунд-контур, выбирают *три новые переменные*: одна переменная $C_u i^{1'}$ — в любой из незаземленных звезд, вторая $i^{2'}$ — в одной из двух катушек треугольника, третья $i^{3'}$ выбирается произвольно. *Катушечные и узловые тензоры можно выразить как в фазных, так и в последовательных осях, в зависимости от компонент примитивной компаунд-сети.*

Приравнивая старые и новые токи в каждой катушке, имеем

$$\begin{array}{l}
 i^m = -C_u i^{1'} \\
 i^p = C_u i^{1'} \\
 i^s = \quad \quad + i^{2'} \\
 i^t = \quad \quad + C_d i^{2'} \\
 i^n = \quad \quad + C_\Delta i^{2'} + i^{3'} \\
 i^k = \quad \quad + C_\Delta i^{2'} + i^{3'} \\
 i^q = \quad \quad \quad + i^{3'}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 1' \quad 2' \quad 3' \\
 m \quad | \quad | \quad | \\
 p \quad | \quad | \quad | \\
 s \quad | \quad | \quad | \\
 C_1 = t \quad | \quad | \quad | \\
 n \quad | \quad | \quad | \\
 k \quad | \quad | \quad | \\
 q \quad | \quad | \quad |
 \end{array} \\
 \end{array}
 \quad
 (20.26)$$

IV. Тензор преобразования C_2 , исключаяющие намагничивающие токи катушек p , s и t трансформатора, находят за четыре этапа следующим образом:

1. Запишем уравнение связей через *старые* токи. Оно выражает равенство нулю сумму МДС по замкнутому контуру компаунд-трансформатора примитивной сети (рис. 20.2, б):

$$n_p i^p + n_s i^s + n_t i^t = 0. \quad (20.27)$$

Здесь n_p — число витков трех первичных катушек:

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 p_1 \quad p_2 \quad p_3 \\
 p_1 \quad | \quad | \quad | \\
 n_p = p_2 \quad | \quad | \quad | \\
 p_3 \quad | \quad | \quad | \\
 \quad \quad \quad | \quad | \quad | \\
 \quad \quad \quad n_{p_3}
 \end{array} \\
 \end{array}
 \quad (20.28)$$

Аналогичные матрицы записывают и для n_s и n_t .

2. Заменяем старые токи новыми из уравнения (20.26)

$$n_p C_u i^{1'} + n_s i^{2'} + n_t C_d i^{2'} = 0 \quad (20.29)$$

или

$$n_p C_u i^{1'} + (n_s + n_t C_d) i^{2'} = 0,$$

что является уравнением связей, выраженным через новые токи.

3. Исключим $i^{2'}$:

$$i^{2'} = -(n_s + n_t C_d)^{-1} n_p C_u i^{1'} = -n i^{1'}.$$

При исключении одного из токов нужно следить за тем, чтобы каждый коэффициент имел обратный. Например, нельзя исключить $i^{1'}$, поскольку C_u (уравнение (20.4)) не имеет обратного. Таким образом, поскольку $i^{1'}$ имеет две компоненты, а $i^{2'}$ —

три (по числу закрытых магнитных контуров), $i^{2'}$ следует исключить.

4. Отсюда получаем уравнения преобразования $i' = C_2 i''$

$$\begin{aligned}
 i^{1'} &= i^{1''} \\
 i^{2'} &= -n i^{1''} \\
 i^{3'} &= i^{3''}
 \end{aligned}
 \quad C_2 = 2' \quad \begin{array}{c} 1'' \quad 3'' \\ \begin{array}{|c|c|} \hline 1' & \\ \hline -n & \\ \hline & 1 \\ \hline \end{array} \end{array} \quad (20.30)$$

Произведение двух тензоров преобразования равно $C_1 C_2 =$

$$C = \begin{array}{c} 1'' \quad 3'' \\ \begin{array}{|c|c|} \hline m & -C_u \\ \hline p & C_u \\ \hline s & -n \\ \hline t & -C_{\Delta n} \\ \hline n & -C_{\Delta n} \quad | \quad I \\ \hline k & -C_{\Delta n} \quad | \quad I \\ \hline q & \quad \quad \quad | \quad I \\ \hline \end{array} \end{array} \quad C_i^* = 1'' \quad \begin{array}{c} m \quad p \quad s \quad t \quad n \quad k \quad q \\ \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline -C_{ut}^* & C_{ut}^* & -n_t^* & -n_t^* C_{\Delta t}^* & -n_t^* C_{\Delta t}^* & -n_t^* C_{\Delta t}^* & \\ \hline & & & & I & I & I \\ \hline \end{array} \end{array} \quad 3'' \quad (20.31)$$

V. Окончательный тензор импеданса находят по формуле $C_i^* z C$

$$z' = \begin{array}{c} 1'' \\ \begin{array}{|c|c|} \hline C_{ut}^* z_m C_u + n_t^* C_{\Delta t}^* z_n C_{\Delta n} + n_t^* C_{\Delta t}^* z_k C_{\Delta n} \\ C_{ut}^* z_{p-t} C_{\Delta n} - n_t^* C_{\Delta t}^* z_{p-t} C_u - n_t^* z_{p-s} C_u \\ - C_{ut}^* z_{p-s} n + n_t^* z_{s-t} C_{\Delta n} + n_t^* C_{\Delta t}^* z_{s-t} n \\ \hline 3'' \quad -z_n C_{\Delta n} - z_k C_{\Delta n} \\ \hline \end{array} \end{array} \quad \begin{array}{c} 3'' \\ \begin{array}{|c|} \hline -n_t^* C_{\Delta t}^* z_n \\ -n_t^* C_{\Delta t}^* z_k \\ \hline z_n + z_k + z_q \\ \hline \end{array} \end{array} \quad (20.32)$$

Поскольку z_{p-s} и другие имеют диагональную матрицу, его позиция в соответствующем члене можно изменить.

Последний столбец и последнюю строку можно исключить по формуле редукции $z_1 - z_2 z_4^{-1} z_3$.

При этом остается компонента, представляющая два обычных уравнения с двумя неизвестными $i^{2'}$ и $i^{b'}$ ($i^{1'}$).

Если токи i' определены, токи в отдельных компаунд-катушках равны $i = C i'$, а индуцированные напряжения $e_c = z C i'$.

6. ЗАМЫКАНИЯ

I. Если одна или несколько фаз линии электропередачи закорачиваются или заземляются в некоторых точках через импедансы, то *каждое замыкание можно рассматривать как компаунд-катушку, присоединенную в двух точках параллельно компаунд-сети* (рис. 20.3), как катушечный тензор C_f и узловой тензор C_{ff} , но в большинстве практических случаев достаточно предположить наличие катушечного тензора C_f . *Каждая катушка замыкания приносит новую переменную i_f , поскольку она вводит в компаунд-сеть новый внешний контур.*

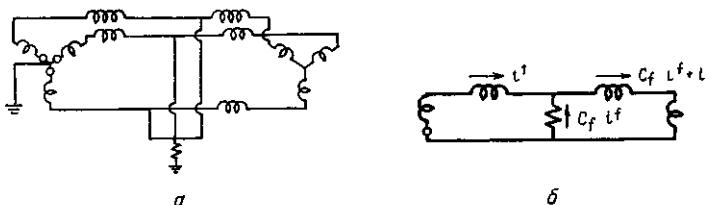


Рис. 20.3.
а — замыкание в сети; б — компаунд-замыкание.

Компаунд-сеть, содержащая одну или несколько катушек замыкания, анализируется точно так же, как и любая другая контурная (узловая или ортогональная) компаунд-сеть, т. е. количество переменных i выбирается по числу контуров и т. д. *Отдельные замыкающие устройства могут быть представлены как в действительных осях фаз, так и в последовательных осях.*

II. Чтобы иметь возможность подставлять *несколько типов замыканий* в двух точках и т. д., можно получить тензор импеданса сети *без замыканий, временно заменив катушку замыкания генератором.* Как показано в гл. 10, § 15, эта процедура эквивалентна измерению импеданса сети через замыкание (или несколько замыканий). Тогда подстановкой разных z для разных типов замыканий получают тензор импеданса сети, *последовательно соединенной с замыканием.*

Этот последний метод (отдельного расчета сети и замыканий) используется особенно в тех случаях, когда можно вводить симметричные составляющие, т. е. когда не сбалансированы только замыкания, а оставшаяся часть сети сбалансирована.

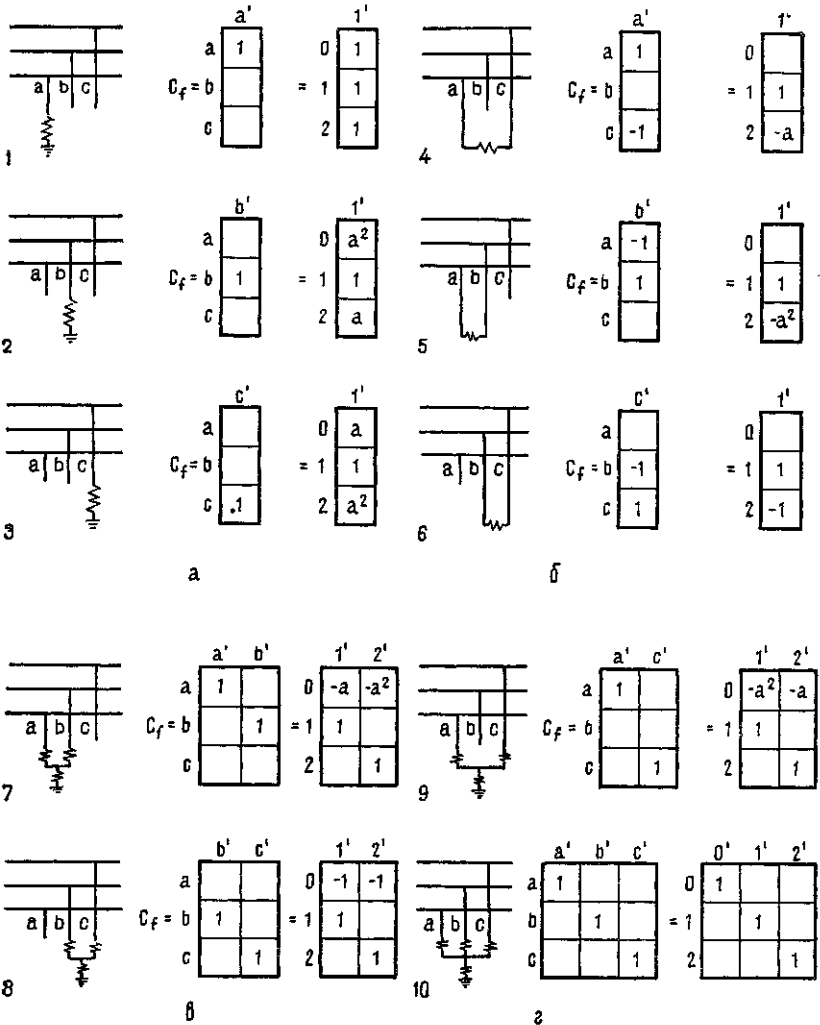
7. ТЕНЗОРЫ ИМПЕДАНСА И КАТУШЕЧНЫЕ ТЕНЗОРЫ ЗАМЫКАНИЙ

I. Каждое замыкание можно рассматривать как присоединенное к системе несбалансированное трехфазное устройство. В таком случае z_f замыкания является z_f для трех изолированных катушек, причем некоторые из них, как показано в первых пяти рисунках табл. 20.1, имеют нулевые импедансы. Они явля-

Отдельные тензоры импеданса z_f замыканий различных типов

| 1 | | $z_f =$ | <table border="1"><thead><tr><th></th><th>a</th><th>b</th><th>c</th></tr></thead><tbody><tr><th>a</th><td>Z</td><td></td><td></td></tr><tr><th>b</th><td></td><td></td><td></td></tr><tr><th>c</th><td></td><td></td><td></td></tr></tbody></table> | | a | b | c | a | Z | | | b | | | | c | | | | $z_f = \frac{1}{3} \times$ | <table border="1"><thead><tr><th></th><th>0</th><th>1</th><th>2</th></tr></thead><tbody><tr><th>0</th><td>Z</td><td>Z</td><td>Z</td></tr><tr><th>1</th><td>Z</td><td>Z</td><td>Z</td></tr><tr><th>2</th><td>Z</td><td>Z</td><td>Z</td></tr></tbody></table> | | 0 | 1 | 2 | 0 | Z | Z | Z | 1 | Z | Z | Z | 2 | Z | Z | Z |
|----|-------------|-------------|--|--|---|---|---|----|-------|-------|-------|---|-------|-----------|-------|---|-------|-------|-----------|----------------------------|--|--|---|---|---|---|-------------|-------------|-------------|---|-------------|------------|------------|---|-------------|------------|------------|
| | a | b | c | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| a | Z | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| b | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| c | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | 0 | 1 | 2 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 0 | Z | Z | Z | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | Z | Z | Z | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 2 | Z | Z | Z | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 2 | | $z_f =$ | <table border="1"><thead><tr><th></th><th>a</th><th>b</th><th>c</th></tr></thead><tbody><tr><th>a</th><td></td><td></td><td></td></tr><tr><th>b</th><td></td><td>Z</td><td></td></tr><tr><th>c</th><td></td><td></td><td></td></tr></tbody></table> | | a | b | c | a | | | | b | | Z | | c | | | | $z_f = \frac{1}{3} \times$ | <table border="1"><thead><tr><th></th><th>0</th><th>1</th><th>2</th></tr></thead><tbody><tr><th>0</th><td>Z</td><td>$a^2 Z$</td><td>aZ</td></tr><tr><th>1</th><td>aZ</td><td>Z</td><td>$a^2 Z$</td></tr><tr><th>2</th><td>$a^2 Z$</td><td>aZ</td><td>Z</td></tr></tbody></table> | | 0 | 1 | 2 | 0 | Z | $a^2 Z$ | aZ | 1 | aZ | Z | $a^2 Z$ | 2 | $a^2 Z$ | aZ | Z |
| | a | b | c | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| a | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| b | | Z | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| c | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | 0 | 1 | 2 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 0 | Z | $a^2 Z$ | aZ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | aZ | Z | $a^2 Z$ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 2 | $a^2 Z$ | aZ | Z | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 3 | | $z_f =$ | <table border="1"><thead><tr><th></th><th>a</th><th>b</th><th>c</th></tr></thead><tbody><tr><th>a'</th><td></td><td></td><td></td></tr><tr><th>b</th><td></td><td></td><td></td></tr><tr><th>c</th><td></td><td></td><td>Z</td></tr></tbody></table> | | a | b | c | a' | | | | b | | | | c | | | Z | $z_f = \frac{1}{3} \times$ | <table border="1"><thead><tr><th></th><th>0</th><th>1</th><th>2</th></tr></thead><tbody><tr><th>0</th><td>Z</td><td>aZ</td><td>$a^2 Z$</td></tr><tr><th>1</th><td>$a^2 Z$</td><td>Z</td><td>aZ</td></tr><tr><th>2</th><td>aZ</td><td>$a^2 Z$</td><td>Z</td></tr></tbody></table> | | 0 | 1 | 2 | 0 | Z | aZ | $a^2 Z$ | 1 | $a^2 Z$ | Z | aZ | 2 | aZ | $a^2 Z$ | Z |
| | a | b | c | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| a' | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| b | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| c | | | Z | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | 0 | 1 | 2 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 0 | Z | aZ | $a^2 Z$ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | $a^2 Z$ | Z | aZ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 2 | aZ | $a^2 Z$ | Z | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 4 | | $z_f =$ | <table border="1"><thead><tr><th></th><th>a</th><th>b</th><th>c</th></tr></thead><tbody><tr><th>a</th><td></td><td></td><td></td></tr><tr><th>b</th><td></td><td>Z</td><td></td></tr><tr><th>c</th><td></td><td></td><td>Z</td></tr></tbody></table> | | a | b | c | a | | | | b | | Z | | c | | | Z | $z_f = \frac{1}{3} \times$ | <table border="1"><thead><tr><th></th><th>0</th><th>1</th><th>2</th></tr></thead><tbody><tr><th>0</th><td>$2Z$</td><td>$-Z$</td><td>$-Z$</td></tr><tr><th>1</th><td>$-Z$</td><td>$2Z$</td><td>$-Z$</td></tr><tr><th>2</th><td>$-Z$</td><td>$-Z$</td><td>$2Z$</td></tr></tbody></table> | | 0 | 1 | 2 | 0 | $2Z$ | $-Z$ | $-Z$ | 1 | $-Z$ | $2Z$ | $-Z$ | 2 | $-Z$ | $-Z$ | $2Z$ |
| | a | b | c | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| a | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| b | | Z | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| c | | | Z | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | 0 | 1 | 2 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 0 | $2Z$ | $-Z$ | $-Z$ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | $-Z$ | $2Z$ | $-Z$ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 2 | $-Z$ | $-Z$ | $2Z$ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 5 | | $z_f =$ | <table border="1"><thead><tr><th></th><th>a</th><th>b</th><th>c</th></tr></thead><tbody><tr><th>a</th><td>Z</td><td></td><td></td></tr><tr><th>b</th><td></td><td>Z</td><td></td></tr><tr><th>c</th><td></td><td></td><td>Z</td></tr></tbody></table> | | a | b | c | a | Z | | | b | | Z | | c | | | Z | $z_f =$ | <table border="1"><thead><tr><th></th><th>0</th><th>1</th><th>2</th></tr></thead><tbody><tr><th>0</th><td>Z</td><td></td><td></td></tr><tr><th>1</th><td></td><td>Z</td><td></td></tr><tr><th>2</th><td></td><td></td><td>Z</td></tr></tbody></table> | | 0 | 1 | 2 | 0 | Z | | | 1 | | Z | | 2 | | | Z |
| | a | b | c | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| a | Z | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| b | | Z | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| c | | | Z | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | 0 | 1 | 2 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 0 | Z | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | | Z | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 2 | | | Z | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 6 | | $z_f =$ | <table border="1"><thead><tr><th></th><th>a</th><th>b</th><th>c</th></tr></thead><tbody><tr><th>a</th><td></td><td></td><td></td></tr><tr><th>b</th><td></td><td>Z_g</td><td>Z_g</td></tr><tr><th>c</th><td></td><td>Z_g</td><td>Z_g</td></tr></tbody></table> | | a | b | c | a | | | | b | | Z_g | Z_g | c | | Z_g | Z_g | $z_f = \frac{1}{3} \times$ | <table border="1"><thead><tr><th></th><th>0</th><th>1</th><th>2</th></tr></thead><tbody><tr><th>0</th><td>$4Z_g$</td><td>$-2Z_g$</td><td>$-2Z_g$</td></tr><tr><th>1</th><td>$-2Z_g$</td><td>Z_g</td><td>Z_g</td></tr><tr><th>2</th><td>$-2Z_g$</td><td>Z_g</td><td>Z_g</td></tr></tbody></table> | | 0 | 1 | 2 | 0 | $4Z_g$ | $-2Z_g$ | $-2Z_g$ | 1 | $-2Z_g$ | Z_g | Z_g | 2 | $-2Z_g$ | Z_g | Z_g |
| | a | b | c | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| a | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| b | | Z_g | Z_g | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| c | | Z_g | Z_g | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | 0 | 1 | 2 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 0 | $4Z_g$ | $-2Z_g$ | $-2Z_g$ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | $-2Z_g$ | Z_g | Z_g | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 2 | $-2Z_g$ | Z_g | Z_g | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 7 | | $z_f =$ | <table border="1"><thead><tr><th></th><th>a</th><th>b</th><th>c</th></tr></thead><tbody><tr><th>a</th><td>Z_g</td><td>Z_g</td><td>Z_g</td></tr><tr><th>b</th><td>Z_g</td><td>Z_g</td><td>Z_g</td></tr><tr><th>c</th><td>Z_g</td><td>Z_g</td><td>Z_g</td></tr></tbody></table> | | a | b | c | a | Z_g | Z_g | Z_g | b | Z_g | Z_g | Z_g | c | Z_g | Z_g | Z_g | $z_f =$ | <table border="1"><thead><tr><th></th><th>0</th><th>1</th><th>2</th></tr></thead><tbody><tr><th>0</th><td>$3Z_g$</td><td></td><td></td></tr><tr><th>1</th><td></td><td></td><td></td></tr><tr><th>2</th><td></td><td></td><td></td></tr></tbody></table> | | 0 | 1 | 2 | 0 | $3Z_g$ | | | 1 | | | | 2 | | | |
| | a | b | c | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| a | Z_g | Z_g | Z_g | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| b | Z_g | Z_g | Z_g | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| c | Z_g | Z_g | Z_g | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | 0 | 1 | 2 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 0 | $3Z_g$ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 8 | | $z_f =$ | <table border="1"><thead><tr><th></th><th>a</th><th>b</th><th>c</th></tr></thead><tbody><tr><th>a</th><td></td><td></td><td></td></tr><tr><th>b</th><td></td><td>$Z + Z_g$</td><td>Z_g</td></tr><tr><th>c</th><td></td><td>Z_g</td><td>$Z + Z_g$</td></tr></tbody></table> | | a | b | c | a | | | | b | | $Z + Z_g$ | Z_g | c | | Z_g | $Z + Z_g$ | $z_f = \frac{1}{3} \times$ | <table border="1"><thead><tr><th></th><th>0</th><th>1</th><th>2</th></tr></thead><tbody><tr><th>0</th><td>$2Z + 4Z_g$</td><td>$-Z - 2Z_g$</td><td>$-Z - 2Z_g$</td></tr><tr><th>1</th><td>$-Z - 2Z_g$</td><td>$2Z + Z_g$</td><td>$-Z + Z_g$</td></tr><tr><th>2</th><td>$-Z - 2Z_g$</td><td>$-Z + Z_g$</td><td>$2Z + Z_g$</td></tr></tbody></table> | | 0 | 1 | 2 | 0 | $2Z + 4Z_g$ | $-Z - 2Z_g$ | $-Z - 2Z_g$ | 1 | $-Z - 2Z_g$ | $2Z + Z_g$ | $-Z + Z_g$ | 2 | $-Z - 2Z_g$ | $-Z + Z_g$ | $2Z + Z_g$ |
| | a | b | c | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| a | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| b | | $Z + Z_g$ | Z_g | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| c | | Z_g | $Z + Z_g$ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | 0 | 1 | 2 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 0 | $2Z + 4Z_g$ | $-Z - 2Z_g$ | $-Z - 2Z_g$ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | $-Z - 2Z_g$ | $2Z + Z_g$ | $-Z + Z_g$ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 2 | $-Z - 2Z_g$ | $-Z + Z_g$ | $2Z + Z_g$ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

Первая колонка — z_f в фазных осях, вторая колонка — z_f в последовательных осях.

Отдельные тензоры преобразования C_f замыканий разных типов

Первая колонка — C_f в фазных осях; вторая колонка — C_f в последовательных осях;
 а — линия на заземление; б — линия на линию; в — двойная линия на заземление; г — три фазы на заземление.

ются частными случаями уравнений (13.18) и (13.21) соответственно.

Импеданс заземления для замыкания (см. рис. 19.16) образует другую компаунд-катушку, соединенную последовательно с компаунд-катушкой замыкания. Для экономии можно считать, что импеданс заземления Z_g объединен в три изолированные ка-

тушки замыкания (см. рис. 19.19), поэтому их z_f также включает Z_g аналогично тому, как это сделано в уравнении (19.40) (см. последние рисунки табл. 20.1). На этих рисунках каждая катушка замыкания все еще изолирована; *влияние катушки заземления состоит лишь в изменении собственных и взаимных импедансов тех катушек замыкания, с которыми она соединена*, т. е. при новом значении z_f можно игнорировать присутствие импеданса заземления.

II. Катушечный тензор замыкания показывает способ соединения импеданса замыкания с сетью. Катушечные тензоры замыкания различных типов даны в табл. 20.2 как в фазных, так и в последовательных осях. В каждом замыкании столько же новых токов, сколько и действительно текущих токов (чаще всего существует *один* действительный ток).

Когда замыкание состоит из треугольника, его нужно рассматривать как и любое другое соединенное треугольником трехфазное устройство.

8. ПРИМЕР ОДИНОЧНОГО ЗАМЫКАНИЯ

I. Рассмотрим сеть (рис. 20.4, а), в которой есть замыкание двойной линии заземления с фазами b и c . В компаунд-сети замыкание представлено шунтирующей катушкой z_f по этой линии.

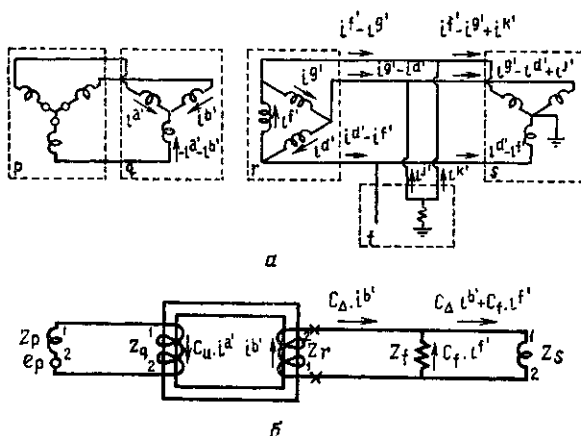


Рис. 20.4.

а — одиночное замыкание в сети; б — компаунд-замыкание.

По числу контуров выбираются *три переменные*. Через замыкание протекает ток $C_f i^{f'}$ (где $i^{f'}$ имеет две компоненты: $i^{j'}$ и $i^{k'}$), в треугольнике — ток $i^{b'}$ (с тремя компонентами), а в заземленной звезде — $C_u i^{a'}$ (где $i^{a'}$ имеет две компоненты: $i^{a'}$ и $i^{b'}$).

После того как построена компаунд-сеть и обозначены протекающие токи, *последующий анализ полностью соответствует анализу обычной контурной сети.*

II. Тензор импеданса и вектор приложенного напряжения примитивной компаунд-сети с пятью катушками равны

$$z = \begin{array}{c|ccccc} & p & q & r & f & s \\ \hline p & z_p & & & & \\ \hline q & & & z_{q-r} & & \\ \hline r & & z_{q-r} & & & \\ \hline f & & & & z_f & \\ \hline s & & & & & z_s \end{array}, \quad (20.33) \quad e = \begin{array}{c|ccccc} & p & q & r & f & s \\ \hline e_p & & & & & \end{array}, \quad (20.34)$$

где значение z_f из табл. 20.2 равно

$$z_f = \begin{array}{c|ccc} & a & b & c \\ \hline a & & & \\ \hline b & & Z_f & Z_f \\ \hline c & & Z_f & Z_f \end{array} = \frac{1}{3} \begin{array}{c|ccc} & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 4Z_f & -2Z_f & -2Z_f \\ \hline 1 & -2Z_f & Z_f & Z_f \\ \hline 2 & -2Z_f & Z_f & Z_f \end{array} \quad (20.35)$$

Трехфазные тензоры импеданса z_p и z_s имеют по три строки и по три столбца из собственных и взаимных индуктансов трех катушек каждого трехфазного устройства *без их взаимосоединения.*

III. Установим соотношение между старыми и новыми токами, протекающими в каждой катушке (рис. 20.4, б):

$$\begin{array}{l} i^p = -C_u i^{a'} \\ i^q = C_u i^{a'} \\ i^r = i^{b'} \\ i^f = C_f i^{f'} \\ i^s = C_\Delta i^{b'} + C_f i^{f'} \end{array} \quad C_1 = \begin{array}{c|ccc} & a' & b' & f' \\ \hline p & -C_u & & \\ \hline q & C_u & & \\ \hline r & & I & \\ \hline f & & & C_f \\ \hline s & & C_\Delta & C_f \end{array}, \quad (20.36)$$

где трехфазные тензоры преобразования C_u , C_f и C_Δ из табл. 19.2 и 20.1 равны соответственно

$$C_a = \begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|} \hline a' & b' \\ \hline a & 1 \\ \hline b & \\ \hline c & 1 \quad -1 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|} \hline 1' & 2' \\ \hline 0 & \\ \hline 1 & \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array} \end{array}, \quad (20.37)$$

$$C_f = \begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|} \hline j' & k' \\ \hline h & \\ \hline j & 1 \\ \hline k & \\ \hline \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|} \hline 1' & 2' \\ \hline 0 & -1 \quad -1 \\ \hline 1 & \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array} \end{array}, \quad (20.38)$$

$$C_\Delta = \begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|c|} \hline d' & f' & g' \\ \hline d & & 1 \quad -1 \\ \hline f & -1 & \\ \hline g & 1 & -1 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0' & 1' & 2' \\ \hline 0 & & \\ \hline & a^2 - a & \\ \hline & & a - a \\ \hline \end{array} \end{array}, \quad (20.39)$$

Коэффициенты при новых токах дают тензор преобразования цепи C_1 .

IV. Для исключения намагничивающих токов трансформатора уравнение связи трансформатора записывается до взаимодействия

$$n_q i^q + n_r i^r = 0 \quad (20.40)$$

С учетом уравнения (20.36) уравнение связи после присоединения записывают как

$$n_q C_a i^{a'} + n_r i^{b'} = 0. \quad (20.41)$$

Исключаем i_b' :

$$i^{b'} = -n_r^{-1} n_q C_a i^{a'}. \quad (20.42)$$

Таким образом, уравнение связи заменяется преобразованием $i' = C_2 i''$

$$\begin{array}{l} i^{a'} = i^{a''} \\ i^{b'} = -n_r^{-1} n_q C_a i^{a''} = -n i^{a''} \\ i^{f'} = i^{f''} \end{array} \quad \begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|} \hline a'' & f'' \\ \hline a' & I \\ \hline & -n \\ \hline f' & I \\ \hline \end{array} \end{array} \quad (20.43)$$

V. Результирующий тензор преобразования $C_1 C_2$ равен

$$C = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{c} a'' \\ f'' \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} p \\ q \\ r \\ f \\ s \end{array} & \begin{array}{c} -C_{u1} \\ C_{u1} \\ -n \\ C_f \\ -C_{\Delta} n \\ C_f \end{array} \end{array} \quad C_t^* = \begin{array}{c|c|c|c|c} & p & q & r & f & s \\ \hline a'' & -C_{ut}^* & C_{ut}^* & -n_t^* & & -n_t^* C_{\Delta t}^* \\ \hline f'' & & & & C_{ft}^* & C_{ft}^* \end{array} \quad (20.44)$$

VI. Тензор импеданса всей системы по соотношению $C_t^* z C$ равен

$$z'' = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{c} a'' \\ f'' \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} a'' \\ f'' \end{array} & \begin{array}{c} C_{ut}^* z_p C_{u1} - C_{ut}^* z_{q-r} n \\ -n_t^* z_{q-r} C_{u1} + \\ + n_t^* C_{\Delta t}^* z_s C_{\Delta} n \\ -C_{ft}^* z_s C_{\Delta} n \end{array} \quad \begin{array}{c} \\ -n_t^* C_{\Delta t}^* z_s C_f \\ C_{ft}^* (z_f + z_s) C_f \end{array} \end{array} \quad (20.45)$$

и имеет 2-матрицу с *четырьмя* строками и столбцами. Ось a'' можно исключить по формулам редукции (гл. 10), при этом остаются лишь две переменные для замыкания.

Токи находят как $i'' = z''^{-1} e''$, где $e'' = C_t^* e$:

$$e'' = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{c} a'' \\ f'' \end{array} \\ \hline C_{ut}^* e_p & 0 \end{array}. \quad (20.46)$$

После того как токи i'' определены, *напряжения на отдельных катушках* каждого трехфазного устройства находят по соотношению

$$e_c = z C i'' = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{c} p \\ q \\ r \\ f \\ s \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} p \\ q \\ r \\ f \\ s \end{array} & \begin{array}{c} -z_p C_{u1} i^{a''} \\ -z_{q-r} n i^{a''} \\ z_{q-r} C_{u1} i^{a''} \\ z_f C_f i^{f''} \\ -z_s C_{\Delta} n i^{a''} + z_s C_f i^{f''} \end{array} \end{array}, \quad (20.47)$$

где $z C$ уже определены в уравнении (20.45). Токи в отдельных катушках находят как $i_c = C i''$. Собственные и взаимные адмиттансы отдельных компаунд-катушек определяют через $S_y'' C_t^*$.

9. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РАСЧЕТЫ ДЛЯ ОДНОВРЕМЕННЫХ ЗАМЫКАНИЙ

I. Рассмотрим сеть (рис. 20.5, а), в которой имеются два замыкания в точках f_1 и f_2 . В примитивной компаунд-сети (рис. 20.5, б) имеется восемь закрытых электрических контуров и два магнитных контура. Поскольку возможны несколько типов замыканий, временно следует допустить замену замыканий в этих точках трехфазными генераторами e_{f_1} и e_{f_2} . Метод анализа остается прежним, как для любой другой компаунд-сети.

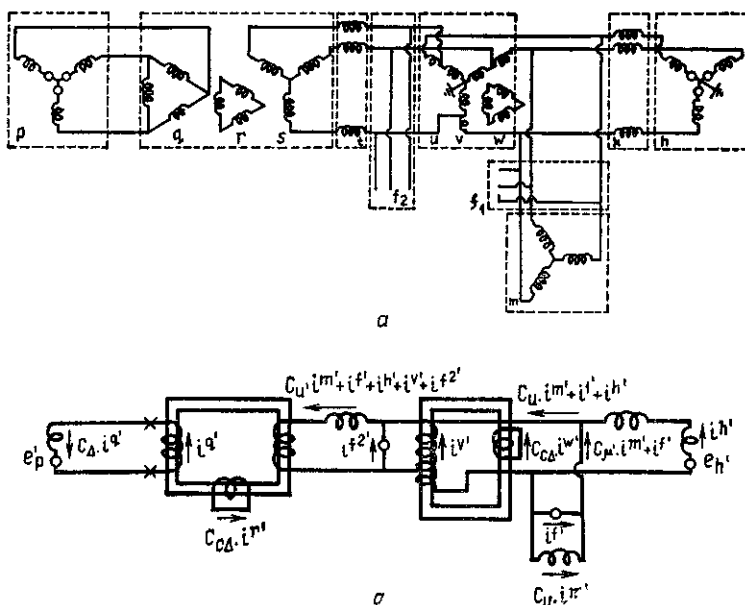


Рис. 20.5. Многократные замыкания:
а — сеть с двумя замыканиями; б — компаунд-сеть.

После нахождения z' компаунд-сети, содержащей шесть строк и столбцов (две из восьми исходных переменных исключены, так как намагничивающие токи двух трансформаторов не принимаются во внимание), будут также исключены четыре строки и четыре столбца так, чтобы в z' остались лишь строки и столбцы замыканий f_1 и f_2 . Результирующий z' , состоящий из двух строк и двух столбцов, будет подставлен на место e_{f_1} и e_{f_2} последовательно с импедансами z_f замыканий разных типов.

II. Тензор импеданса z примитивной сети равен

| | p | q | r | s | t | f ₂ | u | v | w | k | h | f ₁ | m |
|----------------|-------|-----------|-----------|---|----------|----------------|-----------|-----------|---|---|---|----------------|----------|
| p | z_p | | | | | | | | | | | | |
| q | | z_{q-r} | z_{q-s} | | | | | | | | | | |
| r | | z_{q-r} | z_{r-s} | | | | | | | | | | |
| s | | z_{q-s} | z_{r-s} | | | | | | | | | | |
| t | | | | | z_t | | | | | | | | z_{tm} |
| f ₂ | | | | | | | | | | | | | |
| z = u | | | | | | | z_{u-v} | z_{u-w} | | | | | |
| v | | | | | | | z_{u-v} | z_{v-w} | | | | | |
| w | | | | | | | z_{u-w} | z_{v-w} | | | | | |
| k | | | | | | | | | | | | | |
| h | | | | | | | | | | | | | |
| f ₁ | | | | | | | | | | | | | |
| m | | | | | z_{tm} | | | | | | | | z_m |

(20.48)

Следует заметить, что ветви, представляющие замыкания f_1 и f_2 , не имеют импедансов. Для них зарезервированы лишь соответствующие строки и столбцы. Предполагается, что между двумя линиями передачи t и m существует взаимный импеданс z_{tm} .

Вектор приложенного напряжения равен

$$e = \begin{bmatrix} e_p & & & & & e_{f_2} & & & & & e_h & e_{f_1} & & \end{bmatrix} \quad (20.49)$$

(Если компаунд-сеть с несколькими одновременными замыканиями рассматривается как ортогональная компаунд-сеть, то дополнительные генераторы замыкания не вводят в примитивную сеть дополнительных воображаемых катушек. Генераторы замыкания в этом случае проявляются как компоненты E' , а не e . Однако в любом случае результирующий тензор импеданса z' имеет такое же число строк и столбцов.)

III. Для получения тензора преобразования C_1 выбирается столько новых переменных, сколько имеется контуров, а именно восемь. Предполагается, что две из них, токи i^{f_1} и i^{f_2} , протекают через генераторы замыкания. (Наличие катушечного тензора C_f будет предполагаться в том случае, если генераторы заменяются

импедансами замыкания.) Другие переменные, как обычно, выбираются в треугольниках и незаземленных звездах.

После нахождения токов, протекающих в каждой катушке (рис. 20.5, б), между старыми и новыми токами в катушках устанавливается соотношение $i = C_1 i'$

$$\begin{aligned}
 i^p &= C_{\Delta} i^{q'} \\
 i^q &= i^{q'} \\
 i^r &= C_{c\Delta} i^{r'} \\
 i^s &= i^{f_2'} + i^{v'} + i^{h'} + i^{f_1'} + C_{\mu} i^{m'} \\
 i^t &= i^{f_2'} + i^{v'} + i^{h'} + i^{f_1'} + C_{\mu} i^{m'} \\
 i^{f_2} &= i^{f_2'} \\
 i^u &= i^{v'} + i^{h'} + i^{f_1'} + C_{\mu} i^{m'} \\
 i^v &= C_{c\Delta} i^{w'} \\
 i^w &= i^{h'} \\
 i^k &= i^{h'} \\
 i^h &= i^{h'} \\
 i^{f_1} &= i^{f_1'} \\
 i^m &= C_{\mu} i^{m'}
 \end{aligned}$$

| | q' | r' | f ₂ ' | v' | w' | h' | f ₁ ' | m' |
|--------------------|----------------|-----------------|------------------|----|-----------------|----|------------------|----------------|
| p | C _Δ | | | | | | | |
| q | I | | | | | | | |
| r | | C _{cΔ} | | | | | | |
| s | | | I | I | | I | I | C _μ |
| t | | | I | I | | I | I | C _μ |
| f ₂ | | | I | | | | | |
| C ₁ = u | | | | | | I | I | C _μ |
| v | | | | I | | | | |
| w | | | | | C _{cΔ} | | | |
| k | | | | | | I | | |
| h | | | | | | I | | |
| f ₁ | | | | | | | I | |
| m | | | | | | | | C _μ |

(20.50)

Коэффициенты при *новых* токах образуют C_1 .

IV. Уравнения связи двух трансформаторов для исключения намагничивающих токов, записанные через *старые* токи, имеют вид

$$\mathbf{n}_q \mathbf{i}^q + \mathbf{n}_r \mathbf{i}^r + \mathbf{n}_s \mathbf{i}^s = 0, \quad (20.51)$$

$$\mathbf{n}_u \mathbf{i}^u + \mathbf{n}_v \mathbf{i}^v + \mathbf{n}_w \mathbf{i}^w = 0.$$

Заменяя старые токи новыми, получаем

$$\mathbf{n}_q \mathbf{i}^{q'} + \mathbf{n}_r C_{c\Delta} \mathbf{i}^{r'} + \mathbf{n}_s (\mathbf{i}^{f_2'} + \mathbf{i}^{v'} + \mathbf{i}^{h'} + \mathbf{i}^{f_1'} + C_u \mathbf{i}^{m'}) = 0, \quad (20.52)$$

$$\mathbf{n}_u (\mathbf{i}^{h'} + \mathbf{i}^{f_1'} + C_u \mathbf{i}^{m'}) + \mathbf{n}_v \mathbf{i}^{v'} + \mathbf{n}_w C_{c\Delta} \mathbf{i}^{w'} = 0.$$

Исключив, скажем, $\mathbf{i}^{q'}$ из первого уравнения, а $\mathbf{i}^{h'}$ из второго, имеем

$$\mathbf{i}^{q'} = -\mathbf{n}_q^{-1} [\mathbf{n}_r C_{c\Delta} \mathbf{i}^{r'} + \mathbf{n}_s (\mathbf{i}^{f_2'} + \mathbf{i}^{v'} + \mathbf{i}^{h'} + \mathbf{i}^{f_1'} + C_u \mathbf{i}^{m'})],$$

$$\mathbf{i}^{h'} = -\mathbf{n}_u^{-1} (\mathbf{n}_v \mathbf{i}^{v'} + \mathbf{n}_w C_{c\Delta} \mathbf{i}^{w'}) - \mathbf{i}^{f_1'} - C_u \mathbf{i}^{m'}.$$

Подставив $\mathbf{i}^{h'}$ в первое уравнение, получим

$$\mathbf{i}^{q'} = -\mathbf{n}_q^{-1} \mathbf{n}_r C_{c\Delta} \mathbf{i}^{r'} - \mathbf{i}_q^{-1} \mathbf{n}_s [\mathbf{i}^{f_2'} + (\mathbf{I} - \mathbf{n}_u^{-1} \mathbf{n}_v) \mathbf{i}^{v'} - \mathbf{n}_u^{-1} \mathbf{n}_w C_{c\Delta} \mathbf{i}^{w'}].$$

Определим

$$\mathbf{n}_1 = -\mathbf{n}_q^{-1} \mathbf{n}_r, \quad \mathbf{n}_2 = -\mathbf{n}_q^{-1} \mathbf{n}_s, \quad \mathbf{n}_3 = -(\mathbf{n}_q^{-1} \mathbf{n}_s - \mathbf{n}_q^{-1} \mathbf{n}_s \mathbf{n}_u^{-1} \mathbf{n}_v),$$

$$\mathbf{n}_4 = \mathbf{n}_q^{-1} \mathbf{n}_s \mathbf{n}_u^{-1} \mathbf{n}_w, \quad \mathbf{n}_6 = -\mathbf{n}_u^{-1} \mathbf{n}_w, \quad \mathbf{n}_7 = -\mathbf{n}_u^{-1} \mathbf{n}_w$$

и подставим в выражения для $\mathbf{i}^{q'}$ и $\mathbf{i}^{h'}$

$$\mathbf{i}^{q'} = \mathbf{n}_1 C_{c\Delta} \mathbf{i}^{r'} + \mathbf{n}_2 \mathbf{i}^{f_2'} + \mathbf{n}_3 \mathbf{i}^{v'} + \mathbf{n}_4 C_{c\Delta} \mathbf{i}^{w'},$$

$$\mathbf{i}^{h'} = \mathbf{n}_6 \mathbf{i}^{v'} + \mathbf{n}_7 C_{c\Delta} \mathbf{i}^{w'} - \mathbf{i}^{f_1'} - C_u \mathbf{i}^{m'}.$$

Оставив другие токи без изменений, получим два уравнения связей в виде преобразования $\mathbf{i}' = C_2 \mathbf{i}''$, где

| | r'' | f ₂ ' | v'' | w'' | f ₁ ' | m'' |
|------------------|--------------------------------|------------------|----------------|--------------------------------|------------------|-----------------|
| q' | n ₁ C _{cΔ} | n ₂ | n ₃ | n ₄ C _{cΔ} | | |
| r' | I | | | | | |
| f ₂ ' | | I | | | | |
| v' | | | I | | | |
| w' | | | | I | | |
| h' | | | n ₆ | n ₇ C _{cΔ} | -I | -C _u |
| f ₁ ' | | | | | I | |
| m' | | | | | | I |

(20.53)

V. Результирующий тензор преобразования равен C₁C₂:

| | r'' | f ₂ ' | v'' | w'' | f ₁ ' | m'' |
|----------------|---|-------------------------------|-------------------------------|---|------------------|-----------------|
| p | C _Δ n ₁ C _{cΔ} | C _Δ n ₂ | C _Δ n ₃ | C _Δ n ₄ C _{cΔ} | | |
| q | n ₁ C _{cΔ} | n ₂ | n ₃ | n ₄ C _{cΔ} | | |
| r | C _{cΔ} | | | | | |
| s | | I | I + n ₆ | n ₇ C _{cΔ} | | |
| t | | I | I + n ₆ | n ₇ C _{cΔ} | | |
| f ₂ | | I | | | | |
| C = u | | | n ₆ | n ₇ C _{cΔ} | | |
| v | | | I | | | |
| w | | | | C _{cΔ} | | |
| k | | | n ₆ | n ₇ C _{cΔ} | -I | -C _u |
| h | | | n ₆ | n ₇ C _{cΔ} | -I | -C _u |
| f ₁ | | | | | I | |
| m | | | | | | C _u |

(20.54)

VI. Тензор импеданса z' сети по соотношению $C_t^* z C$, где z дается уравнением (20.48), равен

$$z' = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} r'' & f_2'' & v'' & w'' & f_1'' & m'' \end{array} \\ \begin{array}{c} r'' \\ f_2'' \\ v'' \\ w'' \\ f_1'' \\ m'' \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline z_{rr} & z_{rf_2} & z_{rv} & z_{rw} & z_{rf_1} & z_{rm} \\ \hline z_{rf_2} & z_{f_2 f_2} & z_{f_2 v} & z_{f_2 w} & z_{f_2 f_1} & z_{f_2 m} \\ \hline z_{rv} & z_{f_2 v} & z_{vv} & z_{vw} & z_{vf_1} & z_{vm} \\ \hline z_{rw} & z_{f_2 w} & z_{vw} & z_{ww} & z_{wf_1} & z_{wm} \\ \hline z_{rf_1} & z_{f_2 f_1} & z_{vf_1} & z_{wf_1} & z_{f_1 f_1} & z_{f_1 m} \\ \hline z_{rm} & z_{f_2 m} & z_{vm} & z_{wm} & z_{f_1 m} & z_{mm} \\ \hline \end{array} \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} f_1'' & f_2'' & r'' & v'' & w'' & m'' \end{array} \\ \begin{array}{c} f_1'' \\ f_2'' \\ r'' \\ v'' \\ w'' \\ m'' \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline z_{f_1 f_1} & z_{f_1 f_2} & z_{f_1 r} & z_{f_1 v} & z_{f_1 w} & z_{f_1 m} \\ \hline z_{f_2 f_1} & z_{f_2 f_2} & z_{f_2 r} & z_{f_2 v} & z_{f_2 w} & z_{f_2 m} \\ \hline z_{f_1 r} & z_{f_2 r} & z_{rr} & z_{rv} & z_{rw} & z_{rm} \\ \hline z_{f_1 v} & z_{f_2 v} & z_{rv} & z_{vv} & z_{vw} & z_{vm} \\ \hline z_{f_1 w} & z_{f_2 w} & z_{rw} & z_{vw} & z_{ww} & z_{wm} \\ \hline z_{f_1 m} & z_{f_2 m} & z_{rm} & z_{vm} & z_{wm} & z_{mm} \\ \hline \end{array} \end{array}, \quad (20.55)$$

а вектор приложенного напряжения по соотношению $C_t^* e$ равен

$$e' = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} r'' & f_2'' & v'' & w'' & f_1'' & m'' \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline C_{c\Delta t}^* n_{1t}^* C_{\Delta t}^* e_p & n_{2t}^* C_{\Delta t}^* e_p + e_{f_2} & n_{3t}^* C_{\Delta t}^* e_p + n_{6t}^* e_h & C_{c\Delta t}^* n_{4t}^* C_{\Delta t}^* e_p + C_{c\Delta t}^* n_{7t}^* e_h & + e_{f_1} - e_h & - C_{ut}^* e_h \\ \hline \end{array} \end{array}, \quad (20.56)$$

$$e' = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} r'' & f_2'' & v'' & w'' & f_1'' & m'' \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline e_r & e_{f_2} & e_v & e_w & e_{f_1} & e_m \\ \hline \end{array} \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} f_1'' & f_2'' & r'' & v'' & w'' & m'' \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline e_{f_1} & e_{f_2} & e_r & e_v & e_w & e_m \\ \hline \end{array} \end{array} \quad (20.57)$$

VII. Из z' и e' по формулам редукции (см. гл. 10) можно исключить все строки и столбцы, кроме f_1'' и f_2'' . Сначала, как было показано, нужно изменить порядок осей так, чтобы оси

f_1'' и f_2'' были первыми двумя осями. В этом случае z' и e' можно записать как *дважды компаунд-тензоры*

$$z' = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} d & g \\ \hline z_{dd} & z_{dg} \\ \hline z_{dg} & z_{gg} \end{array} \\ \begin{array}{c} d \\ g \end{array} \end{array}, \quad (20.58) \quad e' = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} d & g \\ \hline e_d & e_g \end{array} \\ \begin{array}{c} d \\ g \end{array} \end{array}. \quad (20.59)$$

Исключив вторую строку и столбец по формулам редукции, получим

$$z'' = z_{dd} - z_{dg} z_{gg}^{-1} z_{dg}, \quad (20.60)$$

$$e'' = e_d - z_{dg} z_{gg}^{-1} e_g, \quad (20.61)$$

где z'' имеет полные шесть строк и столбцов, представляющих собственные и взаимные импедансы трехфазных линий с двумя замыканиями, а e'' имеет *шесть компонент, представляющих напряжения открытой цепи, возникающие на двух замыканиях*, т. е. эквивалентные приложенные напряжения. Следовательно,

$$z'' = z_n = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} f_1'' & f_2'' \\ \hline z_{11} & z_{12} \\ \hline z_{12} & z_{22} \end{array} \\ \begin{array}{c} f_1'' \\ f_2'' \end{array} \end{array}, \quad e'' = e_n = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} f_1'' & f_2'' \\ \hline e_1 & e_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} f_1'' \\ f_2'' \end{array} \end{array}. \quad (20.62)$$

10. ОДНОВРЕМЕННЫЕ ЗАМЫКАНИЯ В СБАЛАНСИРОВАННОЙ СЕТИ

I. В тех случаях когда z_n и e_n сети с замыканиями рассчитаны отдельно, эту сеть можно представить двойной компаунд-катушкой z_n , а два (или больше) замыкания — соединенной с ней последовательно дважды компаунд-катушкой (рис. 20.6). Импеданс

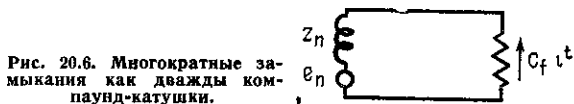


Рис. 20.6. Многократные замыкания как дважды компаунд-катушки.

данс дважды компаунд-катушек — тензор, в котором каждая компонента сама является тензором.

II. Тензор импеданса z' сети и замыканий можно найти из рис. 20.6 обычным способом. Тензор импеданса примитивной сети равен

$$z = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} n & f \\ \hline z_n & \\ \hline & z_f \end{array} \\ \begin{array}{c} n \\ f \end{array} \end{array}, \quad (20.63) \quad e = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} n & f \\ \hline e_n & \end{array} \\ \begin{array}{c} n \\ f \end{array} \end{array}. \quad (20.64)$$

Тензор преобразования C сети и замыканий согласно рис. 20.6 равен

$$\begin{aligned} i^n &= C_f i^{f'} \\ i^{f'} &= C_f i^n \end{aligned} \quad C = \begin{array}{c} f' \\ \hline n \\ \hline f \end{array} \begin{array}{c} C_f \\ \hline C_f \end{array} \quad (20.65)$$

Тензор импеданса результирующей системы по соотношению $C^{t*} z C$ можно записать как

$$z' = C_{f't}^* (z_n + z_f) C_f, \quad (20.66)$$

а вектор приложенного напряжения по $C_t^* e$

$$e' = C_{f't}^* e_n, \quad (20.67)$$

где каждый тензор является компаунд-тензором, выраженным в фазных или в последовательных осях.

Эти два уравнения пригодны для расчета любого количества замыканий.

III. Для двух замыканий эти уравнения принимают вид

$$\begin{aligned} z_n &= \begin{array}{|c|c|} \hline z_{11} & z_{12} \\ \hline z_{12} & z_{22} \\ \hline \end{array} & z_f &= \begin{array}{|c|c|} \hline z_{f_1} & \\ \hline & z_{f_2} \\ \hline \end{array} \\ C_f &= \begin{array}{|c|c|} \hline C_{f_1} & \\ \hline & C_{f_2} \\ \hline \end{array} & e_n &= \begin{array}{|c|c|} \hline e_1 & e_2 \\ \hline \end{array} \end{aligned} \quad (20.68)$$

Выполним операции, указанные в уравнениях (20.66) и (20.67):

$$z' = \begin{array}{c} f_1 \qquad \qquad f_2 \\ \hline \begin{array}{|c|c|} \hline C_{f_1 t}^* (z_{11} + z_{f_1}) C_{f_1} & C_{f_1 t}^* z_{12} C_{f_2} \\ \hline C_{f_2 t}^* z_{12} C_{f_1} & C_{f_2 t}^* (z_{22} + z_{f_2}) C_{f_2} \\ \hline \end{array} \\ \hline f_2 \end{array}, \quad (20.69)$$

$$e' = \begin{array}{c} f_1 \qquad \qquad f_2 \\ \hline \begin{array}{|c|c|} \hline C_{f_1 t}^* e_1 & C_{f_2 t}^* e_2 \\ \hline \end{array} \\ \hline \end{array} \quad (20.70)$$

Следует заметить, что z' — несимметричный тензор.

11. ПРИМЕР ОДИНОЧНОГО ЗАМЫКАНИЯ В СБАЛАНСИРОВАННОЙ СЕТИ

Пусть даны тензор импеданса z_n , а также e_n сбалансированной сети относительно замыкания

$$z_n = \begin{array}{c|cc} & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & Z_0 & & \\ \hline 1 & & Z_1 & \\ \hline 2 & & & Z_2 \end{array}, \quad e_n = \begin{array}{c|cc} & 0 & 1 & 2 \\ \hline & & e_1 & \end{array} \quad (20.71)$$

Предположим, что замыканием является соединение двойной линии с землей (рис. 20.7).

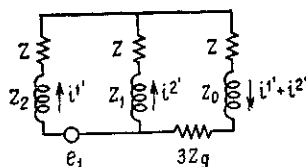
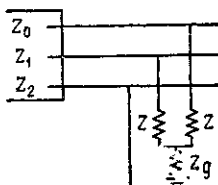


Рис. 20.7. Замыкание двойной линии на заземление. Рис. 20.8. Эквивалентная цепь сети рис. 20.7.

По табл. 20.1 и 20.2 определяем тензор импеданса и катушечный тензор

$$z = \frac{1}{3} \times \begin{array}{c|cc} & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 2Z + 4Z_g & -Z - 2Z_g & -Z - 2Z_g \\ \hline 1 & -Z - 2Z_g & 2Z + Z_g & -Z + Z_g \\ \hline 2 & -Z - 2Z_g & -Z + Z_g & 2Z + 2Z_g \end{array}, \quad C_f = \begin{array}{c|cc} & 1' & 2' \\ \hline 0 & -1 & -1 \\ \hline 1 & 1 & \\ \hline 2 & & 1 \end{array} \quad (20.72)$$

Из уравнений (20.66) и (20.67) получаем z' и e' целой системы

$$z' = \begin{array}{c|cc} & 1' & 2' \\ \hline 1' & Z_0 + Z_1 + 2Z + 3Z_g & Z_0 + Z + 3Z_g \\ \hline 2' & Z_0 + Z + 3Z_g & Z_0 + Z_2 + 2Z + 3Z_g \end{array}, \quad e' = \begin{array}{c|cc} & 1' & 2' \\ \hline & e_1 & \end{array} \quad (20.73)$$

Уравнения $e' = z'i'$ можно представить эквивалентной цепью (рис. 20.8), имеющей два контура.

12. ПРИМЕР ДВОЙНОГО ЗАМЫКАНИЯ В СБАЛАНСИРОВАННОЙ СЕТИ

Допустим, что тензор импеданса z_n , а также e_n сбалансированной сети относительно двух замыканий равны

$$z_n = \begin{matrix} & \begin{matrix} f_1 & f_2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} f_1 \\ f_2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{12} & z_{22} \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} & 0_1 & 1_1 & 2_1 & 0_2 & 1_2 & 2_2 \\ \begin{matrix} 0_1 \\ 1_1 \\ 2_1 \\ 0_2 \\ 1_2 \\ 2_2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} Z_0 + X_0 & & & X_0 & & \\ & Z_1 + X_1 & & & X_1 & \\ & & Z_2 + X_2 & & & X_2 \\ X_0 & & & Z'_0 + X_0 & & \\ & X_1 & & & Z'_1 + X_1 & \\ & & X_2 & & & Z'_2 + X_2 \end{bmatrix} \end{matrix}, \quad (20.74)$$

$$e_n = \begin{matrix} & \begin{matrix} f_1 & f_2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} e_1 & e_2 \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} & 0_1 & 1_1 & 2_1 & 0_2 & 1_2 & 2_2 \\ \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} & & & & & \\ & e_1 & & & & \\ & & & & & \\ & & & & e_2 & \\ & & & & & \\ & & & & & \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (20.75)$$

Предположим, что одно из замыканий — замыкание двух линий, а второе — замыкание линии на землю (рис. 20.9).

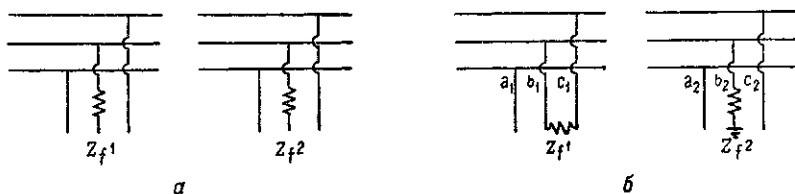


Рис. 20.9. Пример двойного замыкания:
а — до замыкания; б — после замыкания.

Из табл. 20.1 и 20.2 тензор импеданса и катушечный тензор замыканий (непосредственно перед замыканием) равны

$$z = \begin{matrix} & \begin{matrix} f_1 & f_2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} f_1 \\ f_2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} z_{f_1} & \\ & z_{f_2} \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} & 0_1 & 1_1 & 2_1 & 0_2 & 1_2 & 2_2 \\ \begin{matrix} 0_1 \\ 1_1 \\ 2_1 \\ 0_2 \\ 1_2 \\ 2_2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} Z_{f_1}/3 & a^2 Z_{f_1}/3 & a Z_{f_1}/3 & & & \\ a Z_{f_1}/3 & Z_{f_1}/3 & a^2 Z_{f_1}/3 & & & \\ a^2 Z_{f_1}/3 & a Z_{f_1}/3 & Z_{f_1}/3 & & & \\ & & & Z_{f_2}/3 & a^2 Z_{f_2}/3 & a Z_{f_2}/3 \\ & & & a Z_{f_2}/3 & Z_{f_2}/3 & a^2 Z_{f_2}/3 \\ & & & a^2 Z_{f_2}/3 & a Z_{f_2}/3 & Z_{f_2}/3 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (20.76)$$

Импедансы замыканий соединены с сетью через свои катушечные тензоры

$$C_f = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1_1' & 1_2' \end{matrix} \\ \begin{matrix} f_1 \\ f_2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} C_{f_1} & \\ & C_{f_2} \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1_1' & 1_2' \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0_1 \\ 1_1 \\ 2_1 \\ 0_2 \\ 1_2 \\ 2_2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & \\ 1 & \\ -1 & \\ & a^2 \\ & 1 \\ & a \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (20.77)$$

Из уравнений (20.66) и (20.67) (или из уравнений (20.69) и (20.70)) находим z' и e' всей системы

$$z' = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1_1' & 1_2' \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1_1' \\ 1_2' \end{matrix} & \begin{bmatrix} Z_1 + Z_2 + X_1 + X_1 + Z_{f_1} & X_1 - aX_2 \\ X_1 - a^2X_2 & Z_0' + Z_1' + Z_2' + X_0 + X_1 + X_2 + Z_{f_2} \end{bmatrix} \end{matrix}, \quad (20.78)$$

$$e' = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1_1' & 1_2' \end{matrix} \\ & \begin{bmatrix} e_1 & e_2 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (20.79)$$

13. СМЕШАННЫЕ КООРДИНАТНЫЕ ОСИ

I. Как было показано, при построении компаунд-сети для трехфазных систем безразлично, относительно каких осей (фазных a, b, c или последовательных $0, 1, 2$) представлены отдельные устройства. Это различие координатных осей компонент z существенно для катушечных и узловых тензоров, причем каждому типу z соответствует отдельная система осей.

II. Однако нет необходимости представлять все устройства одной системы в осях одинакового типа. *Компаунд-сеть и ее анализ без всяких изменений подходят к системам, в которых различные трехфазные устройства представлены в осях разных типов. Некоторые оси могут быть фазными, другие — последовательными. Некоторые компоненты z могут иметь даже два типа индексов: первый — индекс фазной оси, а второй — последовательной оси или наоборот.*

Это различие отдельных координатных осей компонент z следует вновь принимать во внимание при получении различных

совокупностей отдельных тензоров преобразования (катушечных или узловых тензоров), имеющих два типа индексов, когда одна система имеет фазные оси, а другая — последовательные, т. е. в дополнение к двум системам катушечных и узловых тензоров, приведенных в табл. 19.2 и 20.2, нужно получить дополнительные системы тензоров. В первой системе вертикальными индексами являются 0, 1, 2, а горизонтальными — а, б, с; во второй системе позиции индексов меняются местами.

Подобную серию таблиц можно получить для различных устройств и замыканий.

III. Возможно также введение для некоторых или для всех трехфазных устройств координатных систем других типов, отличных от а, б, с и 0, 1, 2. Однако отдельные тензоры импеданса и тензоры преобразования должны быть выражены в новых отдельных координатных осях.

Кроме того, возможна замена некоторых или всех трехфазных устройств двух- или четырехфазными и другими устройствами без изменения компаунд-сети.

IV. Следует подчеркнуть, что поскольку каждую компаунд-катушку компаунд-сети можно представить отдельно в координатных системах разных типов, то каждая компонента z_1, z_2 компаунд-импеданс-тензора z примитивной оси является тензором соответствующего порядка, а не 2-матрицей.

МУЛЬТИТЕНЗОРЫ

1. ФОРМИРОВАНИЕ ЕЩЕ БОЛЕЕ СЛОЖНЫХ СУЩНОСТЕЙ

Когда организация совокупности атомов образует новую сущность — молекулу, *то результатом организации является возникновение у молекулы новых свойств*, которыми не обладали составляющие молекулу атомы. Процесс организации, однако, продолжается *по нескольким направлениям*, формируя все более и более сложные сущности. Группа молекул может быть организована в коллоидную частицу, фильтрующийся вирус, кристалл, и каждая из этих сущностей имеет свойства, которых не имели образующие их молекулы. Коллоидные частицы могут быть организованы в клетки, клетки — в органы, органы — в растения или организм животного.

Организация совокупности математических выражений в «геометрические объекты», в «тензоры» различной валентности является только первым шагом в организованном формировании еще более сложных математических сущностей. Второй шаг сделан в гл. 9, где совокупность тензоров *одной и той же валентности* организована в «компаунд-тензор». В этой главе совокупность тензоров, *имеющих различную валентность*, организуется в сущность с еще более сложной структурой, которая называется «мультитензором».

«Компаунд-тензоры» и «мультитензоры» являются только отдельными звеньями в различных цепях математических сущностей возрастающей сложности. Эти математические сущности представляют более сложные реальные физические сущности, обнаруживаемые в природе при помощи измерений, выполняемых относительно координатных систем различного типа.

2. МУЛЬТИСИСТЕМЫ КООРДИНАТ

I. В каждой проблеме, рассмотренной ранее, возникало только одно множество систем координат, причем каждая система координат имела n осей. Эти n осей были непосредственно связаны с катушками или являлись такими n гипотетическими осями,

что для $A_{\alpha\beta\gamma}$, например, каждый индекс, α , β или γ относился ко всем n осям. При введении компаунд-тензоров n осей были расчленены на несколько групп так, что для $A_{i\beta p}$, например, индекс i относился к одной группе осей, p — к другой и β — ко всем осям.

II. В электротехнике возникает огромное количество задач, в которых используются различные множества систем координат, причем система координат, принадлежащая одному множеству, может содержать n осей, в то время как другая система координат, принадлежащая ко второму множеству, содержит k осей, третья система может содержать h осей и т. д. Каждое множество систем координат имеет свой собственный тензор преобразования, так что для $A_{\alpha\beta pq}$, например, тензор преобразования множества осей α , β есть C_{α}^{α} , в то время как тензор преобразования множества осей p , q есть $C_{p'}^p$. Два тензора C_{α}^{α} и $C_{p'}^p$ представляют различные группы матриц преобразований.

В частном случае с одной из систем координат можно не связывать ни одного тензора преобразования, так что соответствующие индексы являются закрытыми индексами, например $A_{\alpha\beta(p)(q)}$.

До сих пор предполагалось, что с каждой ветвью каждой сети связана только одна компонента e_{α} или i^{α} , т. е. предполагалось, что в каждой ветви существует только одно известное напряжение или один известный ток. Однако в каждой ветви может существовать несколько наборов токов или напряжений, каждый из которых влияет на другие несколькими способами.

Например, в каждой ветви могут существовать токи и напряжения с различными частотами $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k$, так что в каждой ветви ток представляется как i^p , где p принимает последовательно значения $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k$. Если существует n независимых ветвей, вектор тока представляется как $i^{\alpha p}$, где α представляет ветви, в которых течет ток, а p представляет различные частоты. Вектор $i^{\alpha p}$ имеет $n \times k$ составляющих.

Если в сети имеется конверсия частот, представленная тензором преобразования $C_{p'}^p$, то вектор $i^{\alpha p}$ требует два различных типа тензоров преобразования: C_{α}^{α} взаимосвязывает катушки, оставляя частоты неизменными; $C_{p'}^p$ изменяет частоты, оставляя взаимосвязи катушек неизменными, т. е. $i^{\alpha p}$ является контравариантным вектором валентности один в p -координатной системе и в α -координатной системе. Несмотря на свои два индекса, $i^{\alpha p}$ не является тензором валентности два.

III. В технике очень много мультисистем координат. Например, вращающиеся электрические машины с постоянными и переменными приложенными напряжениями или с малыми колебаниями, накладывающимися на устойчивое вращение; передающие линии, вдоль которых распространяется несколько волн с различными скоростями и т. д.

3. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ МУЛЬТИТЕНЗОРОВ

I. Тензор, содержащий два или более множеств индексов (каждое множество индексов относится к различным множествам систем координат), будем называть «мультитензором».

Основная буква может иметь различное число индексов в различных координатах. Например, $z_{\alpha\beta}^{pqr}$ является ковариантным тензором валентности два в α -координатах, но он является контравариантным тензором валентности три в p -координатах. Матрицы преобразования $C_{\alpha'}^{\alpha}$ и C_p^p принадлежат к различным группам.

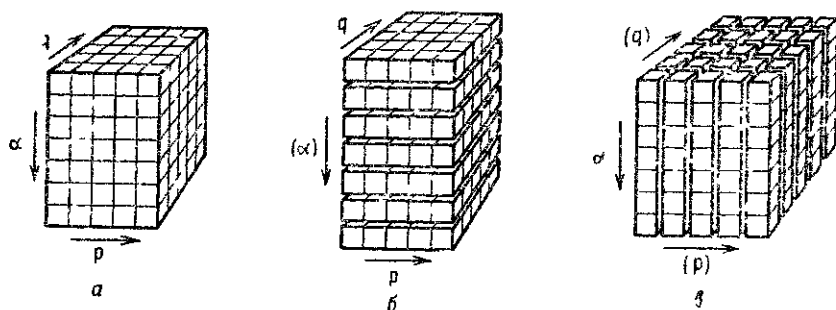


Рис. 21.1. Несколько представлений мультитензора:

а — мультитензор $A^{\alpha pq}$; б — набор k 2-тензоров $A^{(\alpha)pq}$; в — набор k^2 векторов $A^{\alpha(p)(q)}$.

Кроме того, основная буква может быть тензором в одних координатах, геометрическим объектом в других и n -матрицей в третьем множестве координат. Например, $A_{\alpha(p)(q)}$ — вектор в α -координатах и в то же время 2-матрица в p -координатах. Это значит, что $A_{\alpha(p)(q)}$ представляет множество из k^2 векторов A_{α} . Альфакоординатная система может быть преобразована к α' при помощи $C_{\alpha'}^{\alpha}$, но закрытые индексы не преобразуются.

II. Мультитензоры представляют так же, как и обычные тензоры (см. гл. 1, § 7), отличие их в том, что вдоль различных направлений число фиксированных индексов различно. Например, если для $A^{\alpha pq}$ существует семь осей в α -координатах и пять осей в p -координатах, то число компонент $A^{\alpha pq}$ равно $7 \times 5 \times 5 = 175$ (рис. 21.1, а).

Когда α -координаты временно не меняются, т. е. когда α — закрытый индекс ($A^{(\alpha)pq}$), тогда тензор является совокупностью семи 2-тензоров A^{pq} , расположенных в столбец (α) (рис. 21.1, б).

Когда индексы p, q рассматриваются как закрытые индексы ($A^{\alpha(p)(q)}$), тогда тензор — множество из $5^2 = 25$ векторов (рис. 21.1, в).

Точно так же мультитензор $A^{\alpha\beta\gamma\rho\eta}$ можно представить временно как множество $3^3=27$ 2-тензоров $A^{(\alpha)(\beta)(\gamma)\rho\eta}$ (рис.21.2, а) или как совокупность $4^2=16$ 3-тензоров $A^{\alpha\beta\gamma(\rho)(\eta)}$ (рис. 21.2, б).

III. Мультитензор также можно расчленить на составляющие тензоры, так что мультитензор становится компаунд-мультитензором. Например, если в $A^{\alpha\beta\gamma(\rho)(\eta)}$ индексы α, β, γ представляют

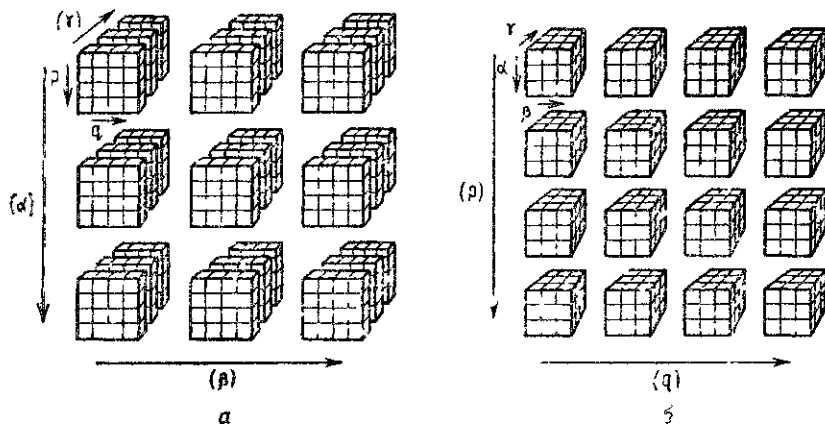


Рис. 21.2 Представление мультитензора

а — совокупность 3^3 2-тензоров $A^{(\alpha)(\beta)(\gamma)\rho\eta}$ б — совокупность 4^2 3-тензоров $A^{\alpha\beta\gamma(\rho)(\eta)}$

как контурные оси, так и оси узловых пар, то, скажем, индекс α можно расчленить на контурные оси m и оси узловых пар u , образуя $A^{m\beta\gamma(\rho)(\eta)}$ и $A^{u\beta\gamma(\rho)(\eta)}$ (рис. 21.3). Или m может представлять активные, а u — неактивные узловые пары и т. д.

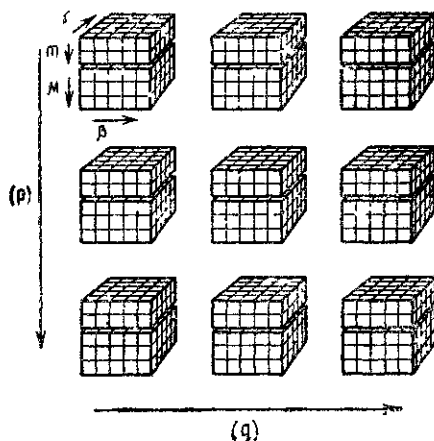


Рис. 21.3. Компаунд-мультитензор $A^{\alpha\beta\gamma(\rho)(\eta)}$.

4. ЗАМЕНА КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

Простой пример мультитензоров можно найти в проблемах устойчивости, где компоненты некоторых тензоров — комплексные числа. Расчет показывает, что *всякое комплексное число $r + jx$, представляющее импеданс, можно заменить матрицей с двумя строками и столбцами, содержащей только действительные числа,*

$$r + jx = \begin{array}{|c|c|} \hline r & -x \\ \hline x & r \\ \hline \end{array}.$$

так, что, например, тензор импеданса $z_{\alpha\beta}$ контурной сети с n^2 комплексными компонентами можно заменить мультитензором $z_{\alpha\beta(p)(q)}$, имеющим вдвое большее количество строк и столбцов со всеми действительными компонентами:

$$z = \begin{array}{|c|c|} \hline a & b \\ \hline a + jb & jc \\ \hline -d & -e - jf \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline a_r & a_i & b_r & b_i \\ \hline a_r & -b_i & & -c_i \\ \hline a_i & b_r & c_i & \\ \hline b_r & -d_i & & -e_i & f_i \\ \hline b_i & -d_i & -f_i & -e_i \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline (q) & (i) \\ \hline (r) & (i) \\ \hline (r) & (i) \\ \hline (i) & (i) \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline a & b \\ \hline (r) & (i) \\ \hline (i) & (i) \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline -c & \\ \hline c & \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline -e & f \\ \hline -f & -e \\ \hline \end{array}.$$

(21.1)

где α и β представляют n осей цепи a и b , в то время как p и q — две оси времени r и i .

Теперь предположим, что вдоль каждой координатной системы (контурной или узловых пар) существуют две новые гипотетические оси времени (действительная и мнимая оси r и i), так что векторы напряжения и тока выражаются через их совпадающие и находящиеся в противофазе составляющие. Например, если вектор тока двухконтурной сети

$$i = \begin{array}{|c|c|} \hline a & b \\ \hline 2 + 3j & 4 - 5j \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline a_r & a_i & b_r & b_i \\ \hline 2 & 3 & 4 & -5 \\ \hline \end{array}.$$

вектор напряжения e находят по z_i как

$$e = \frac{\begin{matrix} a \\ b \end{matrix} \begin{matrix} 2a - 3b + 5c + j(3a + 2b + 4c) \\ -2d - 4e - 5f + j(-3d + 5e - 4f) \end{matrix}}{\begin{matrix} a_r \\ a_i \\ b_r \\ b_i \end{matrix} \begin{matrix} 2a - 3b + 5c \\ 3a + 2b + 4c \\ -2d - 4e - 5f \\ -3d - 5e - 4f \end{matrix}}$$

5. СЕТИ МНОГОЭЛЕКТРОДНОЙ ЛАМПЫ

I. Простым примером сетей, в которых возникают мультитензоры, является сеть многоэлектродной лампы с *маленькими* приложенными напряжениями Δe или токами ΔI . *Из-за нелинейности ламп напряжение одной частоты ω_1 генерирует в каждой катушке токи с несколькими частотами $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ и наоборот.* В результирующих мультитензорах один набор индексов m, n, k, \dots относится к катушкам, в которых протекают токи, в то время как другой набор индексов $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ относится к различным частотам.

Поскольку в этой главе не предполагается никаких частотных преобразований, индексы $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ являются закрытыми индексами.

Уравнения напряжения и тока для контурных и узловых сетей будут получены в форме рядов Тейлора, аналогичных степенным рядам (см. гл. 1, § 13 и 14). *Нелинейную сеть, так же как и линейную, можно представить как контурную, узловую или ортогональную сеть.*

Сначала получают нелинейные уравнения многоэлектродной лампы *без внешней линейной сети*, а затем рассматривают соединение лампы или нескольких ламп с линейными сетями.

II. Так как группа матриц преобразования $S_{\alpha'}^{\alpha}$, которая будет использоваться, не является функцией переменных, *все геометрические объекты, введенные в этой главе, являются тензорами.*

6. БОЛЕЕ ОБЩАЯ ФОРМУЛИРОВКА «ПОСТУЛАТА ВТОРОГО ОБОБЩЕНИЯ»

I. Чтобы физическая картина была ясной, нелинейные уравнения получим в четыре шага, предполагая, что существует: 1) один электрод, имеющий один ток; 2) один электрод, имеющий ток с несколькими частотами; 3) несколько электродов, имеющих различные частоты токов; 4) несколько систем электродов, каждая из которых имеет различные функции.

Шаг от 1 к 2 вводит набор закрытых индексов $(\alpha), (\beta), \dots$; шаг от 2 к 3 добавляет дополнительный набор открытых индек-

сов m, n, \dots (для контурных сетей) или u, v, \dots (для узловых сетей); шаг от 3 к 4 добавляет несколько множеств открытых индексов.

На протяжении всего этого «развертывания» подчеркивается, что при возрастании сложности физической системы число тензоров, образующих уравнение, и содержание, вложенное в них, не изменяются, только возрастает множество индексов. Каждое увеличенное множество сложности физической структуры прибавляет дополнительное множество индексов к каждой основной букве.

Таким образом, какие бы теории, законы, уравнения не устанавливались для обычных сетей, они все остаются справедливыми для мультисетей благодаря простой замене скалярных величин тензорами и простых тензоров соответствующими мультитензорами. Они одинаково справедливы и для компаунд-мультисетей при замене каждого мультитензора соответствующим компаунд-мультитензором.

Это утверждение можно рассматривать как более общую формулировку «постулата второго обобщения», в котором слово «тензор» может означать компаунд-тензоры, мультитензоры и компаунд-мультитензоры произвольной сложности.

II. Ряды Тейлора, соответствующие уравнениям физической системы, вводятся поэтапно: 1) функции действительных переменных, одной переменной и нескольких переменных; 2) функции комплексных переменных, одного множества переменных и нескольких множеств переменных. После этого в таком же порядке вводятся обратные ряды.

7. РЯДЫ ТЕЙЛОРА

Пусть дано уравнение $y=f(x)$ (рис. 21.4). Для данной величины переменной x , скажем x_0 , величина y известна и равна y_0 , но величина y не известна ни для какого другого значения x . Предположим также, что для данного значения x известна не только y , но и все ее производные.

Задача заключается в том, чтобы найти, если это возможно, значение y в другой точке x_1 , лежащей в окрестности x_0 , если величина y известна только в точке x_0 .

Ряды Тейлора дают значение y в точке x_1 через значения y в x_0 и на расстоянии $x_1 - x_0 = \Delta x$, которые известны, при выполнении различных условий, устанавливаемых в учебниках.

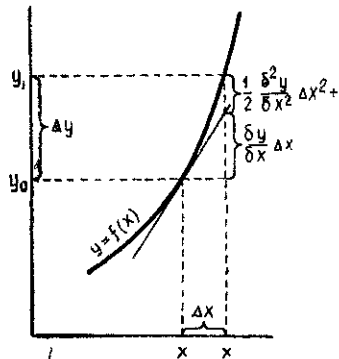


Рис. 21.4. Кривая уравнения $y=f(x)$.

Величина y в точке x_1 равна

$$y_0 + \Delta y = y_0 + \frac{\partial y}{\partial x} \Delta x + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} (\Delta x)^2 + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} (\Delta x)^3 + \dots,$$

где все производные взяты в точке y_0 . Так как необходимо найти только величину Δy , а не сам характер изменения в y , уравнение принимает вид

$$\Delta y = \frac{\partial y}{\partial x} \Delta x + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} (\Delta x)^2 + \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} (\Delta x)^3 + \dots \quad (21.2)$$

Если наклон кривой в окрестности y_0 постоянен, кривизна и $\partial^2 y / \partial x^2$ равны нулю и остается $\Delta y = (\partial y / \partial x) \Delta x$.

8. РЯДЫ ТЕЙЛОРА В ИНВАРИАНТНОЙ ФОРМЕ

I. Пусть каждая из двух переменных есть функция двух других независимых переменных, т. е. пусть $y^a = f^a(x_a, x_b)$ и $y^b = f^b(x_a, x_b)$. (Позиции индексов меняются в различных проблемах в зависимости от того, что представляют переменные y и x .) Если каждая из независимых переменных изменяется на величину Δx_a и Δx_b , зависимые переменные изменяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \Delta y^a = & \left[\frac{\partial y^a}{\partial x_a} \Delta x_a + \frac{\partial y^a}{\partial x_b} \Delta x_b \right] + \\ & + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 y^a}{\partial x_a \partial x_a} \Delta x_a \Delta x_a + \frac{\partial^2 y^a}{\partial x_a \partial x_b} \Delta x_a \Delta x_b + \frac{\partial^2 y^a}{\partial x_b \partial x_a} \Delta x_b \Delta x_a + \right. \\ & \left. + \frac{\partial^2 y^a}{\partial x_b \partial x_b} \Delta x_b \Delta x_b \right] + \frac{1}{6} \left[\frac{\partial^3 y^a}{\partial x_a \partial x_a \partial x_a} \Delta x_a \Delta x_a \Delta x_a + \dots \right] + \dots \end{aligned} \quad (21.3)$$

$$\begin{aligned} \Delta y^b = & \left[\frac{\partial y^b}{\partial x_a} \Delta x_a + \frac{\partial y^b}{\partial x_b} \Delta x_b \right] + \\ & + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 y^b}{\partial x_a \partial x_a} \Delta x_a \Delta x_a + \frac{\partial^2 y^b}{\partial x_a \partial x_b} \Delta x_a \Delta x_b + \frac{\partial^2 y^b}{\partial x_b \partial x_a} \Delta x_b \Delta x_a + \right. \\ & \left. + \frac{\partial^2 y^b}{\partial x_b \partial x_b} \Delta x_b \Delta x_b \right] + \frac{1}{6} \left[\frac{\partial^3 y^b}{\partial x_a \partial x_a \partial x_a} \Delta x_a \Delta x_a \Delta x_a + \dots \right] + \dots \end{aligned}$$

II. Если вместо двух функций двух переменных имеется n функций n переменных, то существует n таких уравнений, которые приведены выше, каждые скобки содержат n , n^2 или n^3 членов вместо $2, 2^2$ или 2^3 . В индексном обозначении n уравнений записывают одним инвариантным уравнением

$$\Delta y^m = \frac{\partial y^m}{\partial x_n} \Delta x_n + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 y^m}{\partial x_n \partial x_k} \Delta x_n \Delta x_k +$$

$$+ \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 y^m}{\partial x_n \partial x_k \partial x_h} \Delta x_n \Delta x_k \Delta x_h + \dots, \quad (21.4)$$

где индексы m, n, k, \dots могут принимать значения a, b, c, \dots

Это уравнение аналогично своей скалярной форме — уравнению (21.2) за исключением того факта, что n -я степень Δx , т. е. $(\Delta x)^n$, заменяется на $\Delta x_a \Delta x_b \dots \Delta x_n$.

9. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ОБЪЕКТЫ БОЛЕЕ ВЫСОКОЙ ВАЛЕНТНОСТИ

I. В инвариантном уравнении (21.4) Δy^m есть контравариантный вектор, а Δx_n — ковариантный вектор; $\partial y^m / \partial x_n$ есть дважды контравариантный тензор (см. уравнение (15.16)) и представляется, например, посредством Y^{mn} .

Выражение $M^{mnk} = \left(\frac{1}{2}\right) \partial^2 y^m / \partial x_n \partial x_k$ есть тензор валентности три, в котором каждый член — частная производная компоненты в Y^{mn} . Оно представляется в каждой частной системе координат n^3 членами, расположенными в кубе (см. рис. 1.2). На бумаге для $n=4$, скажем, его можно представить четырьмя матрицами, каждая из которых содержит 4^2 компонент, в предположении, что в M^{mnk} переменный индекс m принимает фиксированные индексы a, b, c и d последовательно. Одна из четырех матриц (когда m принимает значение a) есть

| | k | a | b | c | d | |
|------------|-----|--|--|--|--|--------|
| n | a | $\frac{\partial^2 y^a}{\partial x_a \partial x_a}$ | $\frac{\partial^2 y^a}{\partial x_a \partial x_b}$ | $\frac{\partial^2 y^a}{\partial x_a \partial x_c}$ | $\frac{\partial^2 y^a}{\partial x_a \partial x_d}$ | (21.5) |
| | b | $\frac{\partial^2 y^a}{\partial x_b \partial x_a}$ | $\frac{\partial^2 y^a}{\partial x_b \partial x_b}$ | $\frac{\partial^2 y^a}{\partial x_b \partial x_c}$ | $\frac{\partial^2 y^a}{\partial x_b \partial x_d}$ | |
| $2M^{anb}$ | c | $\frac{\partial^2 y^a}{\partial x_c \partial x_a}$ | $\frac{\partial^2 y^a}{\partial x_c \partial x_b}$ | $\frac{\partial^2 y^a}{\partial x_c \partial x_c}$ | $\frac{\partial^2 y^a}{\partial x_c \partial x_d}$ | |
| | d | $\frac{\partial^2 y^a}{\partial x_d \partial x_a}$ | $\frac{\partial^2 y^a}{\partial x_d \partial x_b}$ | $\frac{\partial^2 y^a}{\partial x_d \partial x_c}$ | $\frac{\partial^2 y^a}{\partial x_d \partial x_d}$ | |

В матрице $2M^{bnk}$ в каждом числителе стоит y^b вместо y^a ; аналогично в остальных случаях появляются y^c и y^d соответственно. Вместо m , конечно, n или k могут иметь фиксированные индексы a, b, c, d , образуя матрицы, которые представляют различные части первоначального куба, или те же 4^3 компонент можно расположить двумя другими способами.

II. Выражение $D^{mnhk} = (1/6) \partial^3 y^m / \partial x_n \partial x_h \partial x_k$ есть тензор валентности четыре. Он имеет в каждой частной системе координат n^4 компонент, каждая из которых — частная производная

компоненты в M^{mnk} по x_k . На бумаге (рис. 1.7) эти компоненты можно представить n^2 матрицами, каждая с n^2 компонентами, последовательно заменяя два переменных индекса их фиксированными значениями. Для $n=4$ одна из 16 матриц (когда $m=b$ и $n=c$) есть

| | h | a | b | c | d | |
|---------------|-----|--|--|--|--|--------|
| k | a | $\partial^3 y^b$ | $\partial^3 y^b$ | $\partial^3 y^b$ | $\partial^3 y^b$ | (21.6) |
| | | $\partial x_c \partial x_a \partial x_a$ | $\partial x_c \partial x_a \partial x_b$ | $\partial x_c \partial x_a \partial x_c$ | $\partial x_c \partial x_a \partial x_d$ | |
| | b | $\partial^3 y^b$ | $\partial^3 y^b$ | $\partial^3 y^b$ | $\partial^3 y^b$ | |
| $6D^{bcnh} =$ | | $\partial x_c \partial x_b \partial x_a$ | $\partial x_c \partial x_b \partial x_b$ | $\partial x_c \partial x_b \partial x_c$ | $\partial x_c \partial x_b \partial x_d$ | |
| | c | $\partial^3 y^b$ | $\partial^3 y^b$ | $\partial^3 y^b$ | $\partial^3 y^b$ | |
| | | $\partial x_c \partial x_c \partial x_a$ | $\partial x_c \partial x_c \partial x_b$ | $\partial x_c \partial x_c \partial x_c$ | $\partial x_c \partial x_c \partial x_d$ | |
| | d | $\partial^3 y^b$ | $\partial^3 y^b$ | $\partial^3 y^b$ | $\partial^3 y^b$ | |
| | | $\partial x_c \partial x_d \partial x_a$ | $\partial x_c \partial x_d \partial x_b$ | $\partial x_c \partial x_d \partial x_c$ | $\partial x_c \partial x_d \partial x_d$ | |

III. В терминах этих тензоров ряды Тейлора можно записать:

$$\Delta x^m = Y^{mn} \Delta x_n + M^{mnk} \Delta x_n \Delta x_k + D^{mnkh} \Delta x_n \Delta x_k \Delta x_h + \dots \quad (21.7)$$

Заметим, что свободным индексом в каждом члене является m .

IV. Индексы Δy и Δx могут быть верхними или нижними в зависимости от проблемы. Соответственно позиция индексов других тензоров также меняется в различных проблемах, как будет показано ниже. Например, когда ряды представляют преобразования переменных (Δy^m представляют переменные в старой координатной системе, а Δx^m — в новой, тип преобразования, который часто возникает в тензорном анализе), как y , так и x имеют верхние индексы и уравнение (21.7) становится следующим:

$$\Delta x^m = Y^m_{\alpha} \Delta x^{\alpha} + M^m_{\alpha\beta} \Delta x^{\alpha} \Delta x^{\beta} + D^m_{\alpha\beta\gamma} \Delta x^{\alpha} \Delta x^{\beta} \Delta x^{\gamma} + \dots \quad (21.8)$$

10. ТЕНЗОР МОДУЛЯЦИИ

I. Если малые напряжения приложены к различным узловым парам многоэлектродной лампы в дополнение к постоянному напряжению батареи, малое изменение тока дается уравнением (21.7), где y заменяется на I и x на E , т. е.

$$\Delta I^u = Y^{uv} \Delta E_v + M^{uvw} \Delta E_v \Delta E_w + D^{uvwz} \Delta E_v \Delta E_w \Delta E_z + \dots \quad (21.9)$$

4-тензор D^{uvwz} вводит токи, причиной которых является кручение; следовательно, его можно назвать «тензором кручения».

Обычно бывает достаточно рассмотреть первую кривизну кривой $I-E$; следовательно, последним членом можно пренебречь и получить уравнение тока многоэлектродных ламп (рассматриваемых здесь как узловые сети)

$$\Delta I^u = Y^u \Delta E + \Delta E M \Delta E, \quad \Delta I^u = Y^{uv} \Delta E_v + M^{uvw} \Delta E_v \Delta E_w. \quad (21.10)$$

Так как 3-тензор M^{uvw} определяет модуляционные характеристики лампы, его можно назвать «тензором модуляции». Если кривизна пренебрежимо мала, уравнение упрощается: $\Delta I^u = Y^{uv} \Delta E_v$ (см. уравнение (15.15)). Тензор адмиттанса нелинейных сетей можно назвать «тензором усиления».

Для всякой лампы

$$Y^{uv} = \frac{\partial I^u}{\partial E_v},$$

$$M^{uvw} = \frac{1}{2!} \frac{\partial Y^{uv}}{\partial E_w} = \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 I^u}{\partial E_v \partial E_w}, \quad (21.11)$$

$$D^{uvwz} = \frac{1}{3!} \frac{\partial M^{uvw}}{\partial E_z} = \frac{1}{3!} \frac{\partial^2 Y^{uv}}{\partial E_w \partial E_z} = \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 I^u}{\partial E_v \partial E_w \partial E_z}.$$

II. Для пентода четыре матрицы тензора модуляции даны уравнением (21.5), если заменить y на I и x на E . Для ламп с экранирующей сеткой три матрицы тензора-модулятора имеют вид

| | | | | | |
|--------------|-----|---|---|---|--|
| | w | a | b | p | |
| $2M^{avw} =$ | v | a | b | p | |
| | | $\frac{1}{r_a^2} \frac{\partial r_a}{\partial E_a}$ | $\frac{1}{r_a^2} \frac{\partial r_a}{\partial E_b}$ | $\frac{1}{r_a^2} \frac{\partial r_a}{\partial E_p}$ | |
| | | $\frac{\partial G^{ab}}{\partial E_a}$ | $\frac{\partial G^{ab}}{\partial E_b}$ | $\frac{\partial G^{ab}}{\partial E_p}$ | |
| | | $\frac{\partial G^{ap}}{\partial E_a}$ | $\frac{\partial G^{ap}}{\partial E_b}$ | $\frac{\partial G^{ap}}{\partial E_p}$ | |

| | | | | | |
|--------------|-----|---|---|---|--|
| | w | a | b | p | |
| $2M^{bvw} =$ | v | a | b | p | |
| | | $\frac{\partial G^{ba}}{\partial E_a}$ | $\frac{\partial G^{ba}}{\partial E_b}$ | $\frac{\partial G^{ba}}{\partial E_p}$ | |
| | | $\frac{1}{r_b^2} \frac{\partial r_b}{\partial E_a}$ | $\frac{1}{r_b^2} \frac{\partial r_b}{\partial E_b}$ | $\frac{1}{r_b^2} \frac{\partial r_b}{\partial E_p}$ | |
| | | $\frac{\partial G^{bp}}{\partial E_a}$ | $\frac{\partial G^{bp}}{\partial E_b}$ | $\frac{\partial G^{bp}}{\partial E_p}$ | |

| | | | | | |
|--------------|-----|---|---|---|--|
| | w | a | b | p | |
| $2M^{pvw} =$ | v | a | b | p | |
| | | $\frac{\partial G^{pa}}{\partial E_a}$ | $\frac{\partial G^{pa}}{\partial E_b}$ | $\frac{\partial G^{pa}}{\partial E_p}$ | |
| | | $\frac{\partial G^{pb}}{\partial E_a}$ | $\frac{\partial G^{pb}}{\partial E_b}$ | $\frac{\partial G^{pb}}{\partial E_p}$ | |
| | | $\frac{1}{r_p^2} \frac{\partial r_p}{\partial E_a}$ | $\frac{1}{r_p^2} \frac{\partial r_p}{\partial E_b}$ | $\frac{1}{r_p^2} \frac{\partial r_p}{\partial E_p}$ | |

(21.12)

При отсутствии сеточных токов все компоненты первых двух матриц M^{uvw} и M^{vuw} равны нулю.

Так как $M^{uvw} = 1/2 \partial Y^{uv} / \partial E_w$, компоненты Y^{uv} дифференцируются по третьему индексу, данному над столбцами. Например, M^{cra} должно быть равно половине частной производной от Y^{cp} по E_a .

III. Для триода две матрицы тензора модуляции

$$2M^{gvw} = \begin{array}{c|cc} & g & p \\ \hline v & \begin{array}{c|c} \frac{1}{r_g^2} \frac{\partial r_g}{\partial E_g} & \frac{1}{r_g^2} \frac{\partial r_g}{\partial E_p} \\ \hline \frac{\partial G^{gp}}{\partial E_g} & \frac{\partial G^{gp}}{\partial E_p} \end{array} & \\ \hline p & & \end{array} \quad 2M^{pvw} = \begin{array}{c|cc} & g & p \\ \hline v & \begin{array}{c|c} \frac{\partial G^{pg}}{\partial E_g} & \frac{\partial G^{pg}}{\partial E_p} \\ \hline \frac{1}{r_p^2} \frac{\partial r_p}{\partial E_g} & \frac{1}{r_p^2} \frac{\partial r_p}{\partial E_p} \end{array} & \\ \hline p & & \end{array} \quad (21.13)$$

При отсутствии сеточного тока все компоненты первой матрицы равны нулю.

IV. Уравнение напряжения лампы, рассматриваемой как контурная сеть, выводятся из уравнения (21.7)

$$\Delta e = z \Delta i + \Delta i h \Delta i, \quad \Delta e_m = z_{mn} \Delta i^n + h_{mnk} \Delta i^n \Delta i^k, \quad (21.14)$$

где

$$z_{mn} = \frac{\partial e_m}{\partial i^n}; \quad h_{mnk} = \frac{1}{2} \frac{\partial z_{mn}}{\partial i^k} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 e_m}{\partial i^n \partial i^k}.$$

II. КОМПЛЕКСНЫЕ РЯДЫ ТЕЙЛОРА

I. В этом параграфе исследованы ряды Тейлора, в которых переменные и коэффициенты являются не действительными числами, а комплексными.

Пусть множество из n синусоидальных напряжений приложено к нелинейной узловой сети, скажем, к кристаллическому детектору, соединенному последовательно с импедансом, каждое напряжение имеет различную частоту; т. е. пусть

$$\Delta E_{(\alpha)} = \left[\Delta E_{(\omega_1)} \right] \left[\Delta E_{(\omega_2)} \right] \dots \left[\Delta E_{(\omega_n)} \right], \quad (21.15)$$

каждое ΔE является комплексным числом

$$\Delta E_1 = \Delta E_1 + j \Delta E_1' = \sqrt{2} (E_1 \cos \omega_1 t - E_1' \sin \omega_1 t).$$

Так как в этой главе не рассматриваются преобразования частот, закрытый индекс α в $E_{(\alpha)}$ показывает, что компоненты организованы в строку, но нет никакой формулы преобразования, связанной с этим индексом.

Благодаря тому что приложены n напряжений с n различными частотами, в нелинейной цепи будут течь следующие множества токов:

1. Множество n токов $\Delta I^{(\alpha)}$, каждый ток имеет частоту, соответствующую частоте напряжения:

$$\Delta I^{(\alpha)} = \begin{matrix} (\alpha) & (1) & & (2) & & & & (n) \\ \hline \Delta I^{(\omega_1)} & & & \Delta I^{(\omega_2)} & & \dots & & \Delta I^{(\omega_n)} \end{matrix} \quad (21.16)$$

2. Множество из n^2 токов $\Delta I^{(\alpha)(\beta)}$, каждый из которых имеет частоту, равную сумме двух частот приложенных напряжений, включая случай $\alpha = \beta$. Эти токи можно расположить в квадрат. Они являются причиной кривизны кривой $E-I$.

3. Множество из n^2 токов $\Delta I^{(\gamma)(\delta)}$, каждый из которых имеет частоту, равную *разности* частот двух приложенных напряжений. Две предшествующие матрицы обозначаются как

$$\begin{matrix} (-\beta) & (1) & & (2) & & & & (n) \\ \hline (\gamma) & \Delta I^{(\omega_1 + \omega_1)} & & \Delta I^{(\omega_1 - \omega_2)} & & & & \Delta I^{(\omega_1 - \omega_n)} \\ (1) & \hline & & & & & & & \\ \Delta I^{(\alpha)(-\beta)} = & (2) & \Delta I^{(\omega_2 + \omega_1)} & \Delta I^{(\omega_2 + \omega_2)} & \Delta I^{(\omega_2 - \omega_n)} & & & \\ & \hline & & & & & & & \\ & (n) & \Delta I^{(\omega_n + \omega_1)} & \Delta I^{(\omega_n \omega_2)} & \Delta I^{(\omega_n - \omega_n)} & & & \end{matrix} \quad (21.17)$$

Подобная матрица существует для $\Delta I^{(\alpha)(-\beta)}$. $2n^2$ токов называют токами комбинированных частот, а $\Delta I^{(\alpha)(-\beta)}$ — набором из n^2 упорядоченных в квадрат величин.

4. Множество из $4n^3$ токов $\Delta I^{(\alpha)(\pm\beta)(\pm\gamma)}$ организуется в четыре куба, каждый имеет частоту, равную сумме или разности трех приложенных частот.

5. Множество из $8n^4$ токов $\Delta I^{(\alpha)(\pm\beta)(\pm\gamma)(\pm\delta)}$ и т. д. Здесь учитываются только множества $\Delta I^{(\alpha)}$, $\Delta I^{(\alpha)(-\beta)}$, образующие $n + 2n^2$ компонент тока.

II. Первое множество из n токов $\Delta I^{(\alpha)}$ рассчитывают по формуле

$$\Delta I^{(\alpha)} = Y^{(\alpha)(\beta)} \Delta E_{(\beta)}, \quad (21.18)$$

где $Y^{(\alpha)(\beta)}$ — обычно матрица, имеющая только диагональные элементы. Каждую компоненту рассчитывают для частоты приложенного напряжения, следовательно, в уравнении (21.18) $\alpha = \beta$. В более общем случае такое равенство, однако, не обязательно справедливо.

Второе множество из $2n^2$ токов рассчитывают по формуле

$$\Delta I^{(\alpha)(\pm\beta)} = M^{(\alpha)(+\beta)(\gamma)(\delta)} \Delta E_{(\gamma)} \Delta E_{(\delta)}, \quad (21.19)$$

где обычно $\gamma = \alpha$ и $\delta = \beta$ — две 4-матрицы. Вычисления будут приведены ниже.

Матрица $\Delta E_{(\gamma)} \Delta E_{(\delta)}$ представляет $2n^2$ комплексных чисел (две матрицы), образованных всеми возможными произведениями компонент $\Delta E_{(\gamma)}$, образующими суммы и разности частот.

III. При перемножении двух комплексных чисел $\Delta E_1 = A + jB$ и $\Delta E_2 = C + jD$, каждое из которых представляет синусоидальную функцию различных частот ω_1 и ω_2 , необходимо заметить следующее: 1) произведения с $\omega_1 + \omega_2$ частотами находятся из $(A + jB) \times (C + jD)$; 2) произведения с $\omega_1 - \omega_2$ частотами находятся из $(A + jB) \times (C - jD)$; 3) компоненты комплексных чисел представляют квадратные корни от квадратов средних значений, а их произведения — пиковые значения.

IV. Уравнения (21.18) и (21.19) (1-матричное и 2-матричное уравнения) можно скомбинировать как

$$\Delta I^{(\epsilon)} + \Delta I^{(\alpha)(\pm\beta)} = Y^{(\epsilon)(\delta)} \Delta E_{(\delta)} + M^{(\alpha)(\pm\beta)(\gamma)(\delta)} \Delta E_{(\gamma)} \Delta E_{(\delta)}, \quad (21.20)$$

представляющее $n + 2n^2$ уравнений. Так как компоненты 1-матрицы $\Delta I^{(\epsilon)}$ и 2-матрицы $\Delta I^{(\alpha)(\beta)}$ нельзя складывать, различные наборы токов сохраняются отдельными.

12. КОМПАУНД-РЯДЫ

I. Допустим теперь, что дополнительные множества напряжений с $(\alpha \pm \beta)$, $(\alpha \pm \beta \pm \gamma)$, ... частотами также приложены к системе. Множество из $2n^2$ напряжений с комбинированными частотами генерируют в этом случае $2n^2$ токов такой же частоты:

$$[\Delta I^{(\alpha)(\pm\beta)} = Y^{(\alpha)(\pm\beta)(\gamma)(\pm\delta)} \Delta E_{(\gamma)(\pm\delta)}. \quad (21.21)$$

Здесь обычно $\gamma = \alpha$, $\delta = \beta$ и компоненты $Y^{(\alpha)(\pm\beta)(\gamma)(\pm\delta)}$ рассчитываются при различных производных частотах. Дополнительные токи, обусловленные кривизной кривых $E-I$, здесь вычислять не будем.

2-матрица $\Delta E_{(\gamma)(\pm\delta)}$ содержит $2n^2$ комплексных чисел, представляя производные частоты приложенных напряжений, но они образованы не за счет основной частоты приложенных напряжений, как компоненты $\Delta E_{(\gamma)} \Delta E_{(\delta)}$, а независимо от них.

Следовательно, если приложены напряжения как с основной, так и с производной частотами, результирующие токи с основной и производной частотами суть

$$\Delta I^{(\epsilon)} + \Delta I^{(\alpha)(\pm\beta)} + \dots = Y^{(\epsilon)(\sigma)} \Delta E_{(\sigma)} + M^{(\alpha)(\pm\beta)(\gamma)(\delta)} \Delta E_{(\gamma)} \Delta E_{(\delta)} + \\ + \dots + Y^{(\alpha)(\pm\beta)(\gamma)(\pm\delta)} \Delta E_{(\gamma)(\pm\delta)} + \dots + \dots \quad (21.22)$$

Это есть матричная форма тейлоровских рядов для каждого множества приложенных напряжений, т. е. одна для $\Delta E_{(\alpha)}$, а другая для $\Delta E_{(\sigma)(\pm\beta)}$, каждое множество напряжений генерирует бесконечное множество токов. Такие ряды называются

компаунд-рядами. Если приложено напряжение только с основной частотой, последние члены уравнения (21.22) исчезают.

II. Наоборот, если текут токи как основной частоты, так и производных частот, результирующее напряжение основной частоты и производных частот есть

$$\Delta E_{(\varepsilon)} + \Delta E_{(\alpha)(\pm\beta)} + \dots = Z_{(\varepsilon)(\sigma)} \Delta I^{(\sigma)} + H_{(\alpha)(\pm\beta)(\gamma)(\delta)} \Delta I^{(\gamma)} \Delta I^{(\delta)} + \dots \\ \dots + Z_{(\alpha)(\pm\beta)(\gamma)(\pm\delta)} \Delta I^{(\gamma)(\pm\delta)} + \dots + \dots; \quad (21.23)$$

здесь обычно $\gamma = \alpha$, $\delta = \beta$, $\varepsilon = \sigma$.

III. Надо отметить тот важный факт, что переменные ΔI не обязательно всегда расположены в строку, образуя 1-матрицу $\Delta I^{(\alpha)}$. Здесь некоторые переменные расположены в квадраты, а некоторые в кубы. В современном матричном аппарате переменные располагаются в форме квадрата, образуя матрицу.

13. КОМПЛЕКСНЫЕ РЯДЫ В ИНВАРИАНТНОЙ ФОРМЕ

I. Пусть теперь вместо кристаллического детектора к сети, содержащей катушки, подсоединена многоэлектродная лампа. Если к различным узловым парам приложен набор основных напряжений $\Delta E_{(\alpha)}$, то в каждой цепи текут различные наборы токов с различными частотами.

В этом случае следует вводить два набора индексов: 1) открытые индексы u, v, w , представляющие различные цепи системы a, b, c, g, p и 2) закрытые индексы $(\alpha), (\beta), (\gamma)$, представляющие различные приложенные частоты $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$.

В прямом обозначении открытые индексы не указываются. Когда напряжения как основной, так и производных частот приложены к различным цепям, токи имеют вид (см. уравнения (21.10) и (21.22))

$$\Delta I^{(\varepsilon)} + \Delta I^{(\alpha)(\pm\beta)} + \dots = Y^{(\varepsilon)(\sigma)} \Delta E_{(\sigma)} + \Delta E_{(\gamma)} M^{(\alpha)(\pm\beta)(\gamma)(\delta)} \Delta E_{(\delta)} + \dots + \\ + Y^{(\alpha)(\pm\beta)(\gamma)(\pm\delta)} \Delta E_{(\gamma)(\pm\delta)} + \dots + \dots \quad (21.24)$$

Порядок тензоров тот же, что и в уравнении (21.10), а порядок закрытых индексов тот же, что и в уравнении (21.22).

В индексном обозначении

$$\Delta I^{u(\varepsilon)} + \Delta I^{u(\alpha)(\pm\beta)} + \dots = Y^{uv(\varepsilon)(\delta)} \Delta E_{v(\gamma)} + \\ + M^{uvw(\alpha)(\pm\beta)(\gamma)(\delta)} \Delta E_{v(\gamma)} \Delta E_{w(\delta)} + \dots + \\ + Y^{uv(\alpha)(\pm\beta)(\gamma)(\pm\delta)} \Delta E_{v(\gamma)(\pm\delta)} + \dots + \dots \quad (21.25)$$

Порядок «открытых» индексов тот же, что в уравнении (21.10), а порядок «закрытых» индексов — как в уравнении (21.22).

II. Открытые индексы имеют ковариантный и контравариантный смысл, но закрытые индексы не имеют такого значения, следовательно, для более компактной записи позиции закрытых ин-

дексов можно изменить и записать предыдущее уравнение:

$$\Delta I_{(\varepsilon)}^u + \Delta I_{(\sigma)(\pm\beta)}^u + \dots = Y_{(\varepsilon)(\sigma)}^{uv} \Delta E_{\nu}^{(\sigma)} + M_{(\alpha)(\pm\beta)(\gamma)(\delta)}^{uv\omega} \Delta E_{\nu}^{(\gamma)} \Delta E_{\omega}^{(\delta)} + \dots \\ \dots + Y_{(\sigma)(\pm\beta)(\gamma)(\pm\delta)}^{uv} \Delta E_{\nu}^{(\gamma)(\pm\delta)} + \dots + \dots \quad (21.26)$$

III. Вместо того чтобы писать n^2 различных 2-тензоров для представления $Y^{(\sigma)(\beta)}$, в расчетах применяется метод записи сначала *одного* 2-тензора Y , каждая компонента которого содержит закрытые индексы ($A^{(\alpha)(\beta)}$); при этом операции, представленные открытыми индексами, удаляют, оставляя переменные закрытые индексы. Отныне считается, что закрытые индексы меняются, принимая значения ряда фиксированных индексов.

14. СПИНОРНЫЕ ИНДЕКСЫ

I. Если компоненты тензоров преобразования содержат комплексные числа $a + jb$, выгодно использовать спинорные индексы вместо тензорных, т. е. индексы с чертой над некоторыми из них. Черта над некоторыми индексами помогает также сохранить правильный порядок перемножения нескольких тензоров различной валентности. Спинорное обозначение справедливо, однако, если все комплексные члены представляют величины одной и той же частоты.

Допуская, что открытые индексы — фиксированные, а закрытые — переменные (в случае, когда в одной частной цепи рассматриваются все возможные токи), получаем, что каждое комплексное число представляет величины различной частоты. Следовательно, в данном анализе закрытые индексы не могут быть спинорными.

Допуская, что закрытые индексы — фиксированные, а открытые — переменные (случай, когда рассматриваются токи одной частоты во всех цепях), получаем, что каждое комплексное число представляет величину одной и той же частоты. Таким образом, открытые индексы можно рассматривать как спинорные.

В терминах спинорных индексов тензоры, введенные до сих пор, следующие:

$$e_m, i^m, \Delta e_m, \Delta i^m, Y_m^{\bar{n}}, Z_m^{\bar{n}}, M_m^{\bar{n}k}, Q_m^{\bar{n}k}, D_m^{\bar{n}k\bar{h}}.$$

II. Когда место индексов с чертой в e_m и i^m определено из инвариантности $e_m i^m$, их позиция в других тензорах автоматически следует из уравнений по правилу: два немых индекса должны быть либо оба с чертой, либо оба без черты.

В терминах спинорных индексов предыдущие уравнения будут выглядеть так:

$$\Delta I_{(\varepsilon)}^u + \Delta I_{(\sigma)(\pm\beta)}^u + \dots = Y_{(\varepsilon)(\sigma)}^{u\bar{v}} E_{\nu}^{(\sigma)} + M_{(\sigma)(\pm\beta)(\gamma)(\delta)}^{u\bar{v}\omega} \Delta E_{\nu}^{(\gamma)} \Delta E_{\omega}^{(\delta)} + \dots \\ \dots + Y_{(\sigma)(\pm\beta)(\gamma)(\pm\delta)}^{u\bar{v}} \Delta E_{\nu}^{(\gamma)(\pm\delta)} + \dots + \dots \quad (21.27)$$

15. ОБРАЩЕНИЕ ТЕЙЛОРОВСКИХ РЯДОВ

В предыдущих параграфах были установлены различные формы рядов Тейлора. В следующих параграфах будут найдены обратные ряды.

Так как ряды Тейлора являются степенными рядами, а их обращение уже рассмотрено в гл. 2, § 12 для случая полного отсутствия индексов и наличия одного набора индексов, расчеты здесь повторять не будем. Для рядов Тейлора с одним набором индексов

$$\Delta e = z \Delta i + \Delta i h \Delta i, \quad \Delta e_m^- = z_{mn}^- \Delta i^n + h_{mnk}^- \Delta i^n \Delta i^k, \quad (21.28)$$

обратные ряды по уравнению (2.54)

$$\Delta i = y \Delta e + \Delta e m \Delta e, \quad \Delta i^m = y^{mn} \bar{\Delta} e_n^- + m^{mnk} \bar{\Delta} e_n^- \Delta e_k^-, \quad (21.29)$$

где

$$y = z^{-1}; \quad y^{mn} = (z_{nm})^{-1}; \quad (21.30)$$

$$m = -y_t (y h) y; \quad m^{mnk} = -h_{dfg} y^{md} y^{fn} y^{gk}. \quad (21.31)$$

Там, где 3-тензор h и 2-тензор y заключены в скобки (yh) , это означает, что свободный индекс при h следует умножить на второй индекс при y : $(yh) = y^{md} h_{dfg}$, так что первый индекс при y становится свободным.

Следует заметить, что в уравнении (21.31) свободный индекс d величины h_{dfg} умножается на второй индекс y^{md} , в то время как другие два индекса h_{dfg} умножаются на первые индексы y^{fn} и y^{gk} . При таком порядке перемножения спинорные индексы учитываются автоматически.

16. ОБРАЩЕНИЕ КОМПЛЕКСНЫХ РЯДОВ

I. Пусть дано уравнение напряжения

$$\begin{aligned} \Delta e_{(\epsilon)} + \Delta e_{(\sigma)(\pm\beta)} = z_{(\epsilon)(\sigma)} \Delta i^{(\sigma)} + h_{(\sigma)(\pm\beta)(\gamma)(\delta)} \Delta i^{(\gamma)} \Delta i^{(\sigma)} + \\ + z_{(\sigma)(\pm\beta)(\gamma)(\pm\delta)} \Delta i^{(\gamma)(\pm\delta)} \end{aligned} \quad (21.32)$$

и пусть рассчитывается ему обратное

$$\begin{aligned} \Delta i^{(\epsilon)} + \Delta i^{(\sigma)(\pm\beta)} = y^{(\epsilon)(\sigma)} \Delta e_{(\sigma)} + m^{(\sigma)(\pm\beta)(\gamma)(\delta)} \Delta e_{(\gamma)} \Delta e_{(\delta)} + \\ + y^{(\sigma)(\pm\beta)(\gamma)(\pm\delta)} \Delta e_{(\gamma)(\pm\delta)}, \end{aligned} \quad (21.33)$$

где y и m — неизвестные функции от z и h .

Следуя предыдущему, подставим второе уравнение в первое. Пренебрежем членами более чем второго порядка:

$$\begin{aligned} \Delta e_{(\varepsilon)} + \Delta e_{(\alpha)(\pm\beta)} &= z_{(\varepsilon)(\sigma)} y^{(\sigma)(\nu)} \Delta e_{(\nu)} + \\ &+ h_{(\alpha)(\pm\beta)(\tau)(\delta)} y^{(\tau)(\sigma)} y^{(\sigma)(\nu)} \Delta e_{(\sigma)} \Delta e_{(\nu)} + \\ &+ z_{(\alpha)(\pm\beta)(\tau)(\pm\delta)} m^{(\tau)(\pm\delta)(\sigma)(\nu)} \Delta e_{(\sigma)} \Delta e_{(\nu)} + \\ &+ z_{(\alpha)(\pm\beta)(\tau)(\pm\delta)} y^{(\alpha)(\pm\delta)(\sigma)(\pm\nu)} \Delta e_{(\sigma)(\pm\nu)}. \end{aligned}$$

Приравняем соответствующие коэффициенты при Δe в обеих частях уравнения:

$$\begin{aligned} I_{(\varepsilon)}^{(\nu)} &= z_{(\varepsilon)(\sigma)} y^{(\sigma)(\nu)}, \\ J_{(\alpha)(\pm\beta)}^{(\sigma)(\pm\nu)} &= y_{(\alpha)(\pm\beta)(\tau)(\pm\delta)} y^{(\tau)(\pm\delta)(\sigma)(\pm\nu)}, \\ 0 &= h_{(\alpha)(\pm\beta)(\tau)(\delta)} y^{(\tau)(\delta)} y^{(\delta)(\nu)} + z_{(\sigma)(\pm\beta)(\tau)(\pm\delta)} m^{(\tau)(\pm\delta)(\sigma)(\nu)}. \end{aligned}$$

Решим относительно y и m :

$$y^{(\sigma)(\beta)} = \text{обратная от } z_{(\beta)(\sigma)}; \quad (21.34)$$

$$y^{(\sigma)(\pm\beta)(\tau)(\pm\delta)} = \text{обратная от } z_{(\tau)(\pm\delta)(\sigma)(\pm\beta)}; \quad (21.35)$$

$$m^{(\sigma)(\pm\beta)(\tau)(\delta)} = -h_{(\sigma)(\pm\nu)(\varepsilon)(\omega)} y^{(\sigma)(\pm\beta)(\sigma)(\pm\nu)} y^{(\varepsilon)(\tau)} y^{(\omega)(\delta)}, \quad (21.36)$$

где $\gamma = \alpha$ и $\delta = \beta$.

II. Так как в $\Delta e_{(\varepsilon)} = z_{(\varepsilon)(\sigma)} \Delta i^{(\sigma)}$ матрица $z_{(\varepsilon)(\sigma)}$ обычно содержит только диагональные компоненты (один ток генерирует только одно напряжение своей собственной частоты), обратная ей матрица $y^{(\varepsilon)(\sigma)}$ рассчитывается в этом случае обращением каждой компоненты отдельно.

Аналогично, так как в уравнении

$$\Delta e_{(\sigma)(\pm\beta)} = z_{(\alpha)(\pm\beta)(\tau)(\pm\delta)} \Delta i^{(\tau)(\pm\delta)}$$

каждый ток обычно генерирует только одно напряжение своей собственной частоты (так как $\gamma = \alpha$ и $\delta = \beta$), обращение $z_{(\sigma)(\pm\beta)(\tau)(\pm\delta)}$ рассчитывается обращением каждой компоненты.

17. ОБРАЩЕНИЕ КОМПЛЕКСНЫХ ИНВАРИАНТНЫХ РЯДОВ

I. Пусть дана система инвариантных уравнений

$$\begin{aligned} \Delta e_{(\varepsilon)} + e_{(\alpha)(\pm\beta)} &= z_{(\varepsilon)(\sigma)} \Delta i^{(\sigma)} + \Delta i^{(\tau)} h_{(\alpha)(\pm\beta)(\tau)(\delta)} \Delta i^{(\delta)} + \\ &+ z_{(\alpha)(\pm\beta)(\tau)(\pm\delta)} \Delta i^{(\tau)(\pm\delta)} \end{aligned} \quad (21.37)$$

и пусть рассчитываются обратные ей уравнения

$$\begin{aligned} \Delta i^{(\varepsilon)} + \Delta i^{(\alpha)(\pm\beta)} &= y^{(\varepsilon)(\sigma)} \Delta e_{(\sigma)} + \Delta e_{(\tau)} m^{(\alpha)(\pm\beta)(\tau)(\delta)} \Delta e_{(\delta)} + \\ &+ y^{(\sigma)(\pm\beta)(\tau)(\pm\delta)} \Delta e_{(\tau)(\pm\delta)}, \end{aligned} \quad (21.38)$$

в которых y и m — неизвестные функции z и h .

Подставляем второе уравнение в первое:

$$\begin{aligned} \Delta e_{(\cdot)} + \Delta e_{(\alpha)(\pm\beta)} &= z_{(\cdot)(\tau)} y^{(\sigma)(\nu)} \Delta e_{(\nu)} + \\ &+ \Delta e_{(\sigma)} y_i^{(\tau)(\sigma)} h_{(\alpha)(\pm\beta)(\tau)(\delta)} y^{(\delta)(\nu)} \Delta e_{(\nu)} + \\ &+ \Delta e_{(\sigma)} (z_{(\sigma)(\pm\beta)(\tau)(\pm\delta)} m^{(\tau)(\pm\delta)(\sigma)(\nu)}) \Delta e_{(\nu)} + \\ &+ z_{(\tau)(\pm\beta)(\tau)(\pm\delta)} y^{(\tau)(\pm\delta)(\sigma)(\pm\nu)} \Delta e_{(\sigma)(\pm\nu)}. \end{aligned}$$

Приравниваем соответствующие коэффициенты при Δe :

$$\begin{aligned} I_{(\varepsilon)}^{(\nu)} &= z_{(\varepsilon)(\sigma)} y^{(\sigma)(\nu)}, \\ I_{(\alpha)(\pm\beta)}^{(\sigma)(\pm\nu)} &= z_{(\alpha)(\pm\beta)(\tau)(\pm\delta)} y^{(\tau)(\pm\delta)(\sigma)(\pm\nu)}, \\ 0 &= y_i^{(\tau)(\sigma)} h_{(\alpha)(\pm\beta)(\tau)(\delta)} y^{(\delta)(\nu)} + (z_{(\sigma)(\pm\beta)(\tau)(\pm\delta)} m^{(\tau)(\pm\delta)(\sigma)(\nu)}). \end{aligned}$$

Решаем относительно неизвестных y и m :

$$y^{(\alpha)(\beta)} = z_{(\alpha)(\beta)}^{-1}; \quad (21.39)$$

$$y^{(\sigma)(\pm\beta)(\tau)(\pm\delta)} = z_{(\alpha)(\pm\beta)(\tau)(\pm\delta)}^{-1}; \quad (21.40)$$

$$m^{(\sigma)(\pm\beta)(\tau)(\delta)} = -y_i^{(\cdot)(\tau)} (y^{(\sigma)(\pm\beta)(\sigma)(\pm\nu)} h_{(\alpha)(\pm\beta)(\tau)(\delta)} y^{(\omega)(\delta)}). \quad (21.41)$$

II. В спинорных обозначениях последнее уравнение при замене позиций закрытых индексов и использовании спинорных индексов таково:

$$m_{(\sigma)(\pm\beta)(\tau)(\delta)}^{\overline{m}\overline{n}\overline{k}} = -h_{\overline{h}\overline{f}\overline{g}}^{(\alpha)(\pm\nu)(\varepsilon)(\omega)} y_{(\sigma)(\pm\beta)(\sigma)(\pm\nu)}^{\overline{m}\overline{h}} y_{(\tau)(\tau)}^{\overline{f}\overline{n}} y_{(\omega)(\delta)}^{\overline{g}\overline{k}}. \quad (21.42)$$

III. Необходимо заметить, что последнее уравнение представляет наиболее сложную инвариантную форму, однако оно содержит то же число основных букв, что и уравнение (2.43), представляющее простейшую возможную скалярную форму.

18. УПРОЩЕНИЯ В ЛАМПОВЫХ ЦЕПЯХ

В термоэлектронных цепях ламп описанные выше мультитензоры принимают специальные формы, и можно ввести следующие упрощения.

I. Для лампы без внешней сети $Y^{(\alpha)(\beta)}$ и $M^{(\alpha)(\pm\beta)(\tau)(\delta)}$ содержат только действительные числа; следовательно, для них можно опустить закрытые индексы, их компоненты не зависят от частоты входных напряжений ΔE .

Уравнения лампы (или ламп) записываются как

$$\Delta e_{(\alpha)} + \Delta e_{(\alpha)(\pm\beta)} = z \Delta I^{(\alpha)} + \Delta I^{(\alpha)} h \Delta I^{(\beta)} + z \Delta I^{(\alpha)(\pm\beta)}; \quad (21.43)$$

$$\Delta I^{(\alpha)} + \Delta I^{(\alpha)(\pm\beta)} = Y \Delta E_{(\sigma)} + \Delta E_{(\alpha)} M \Delta E_{(\beta)} + u \Delta E_{(\alpha)(\pm\beta)}; \quad (21.44)$$

их рассматривают как контурную или как узловую сеть соответственно. Уравнения, получаемые при рассмотрении лампы как ортогональной сети, аналогичны.

Обратным к Y является Z и обратным к M (из уравнения (21.31)) является $N = -Z_t(ZM)Z$. Так как Y не имеет закрытых индексов, обратная к M , содержащая Y , не вызывает появления закрытых индексов, так же, как и при умножении на Y .

II. В тензорах импеданса и адмиттанса *внешней сети* все компоненты, за исключением случая, когда два закрытых индекса совпадают, равны нулю. Например:

$$z_{(\sigma)(\beta)} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \begin{array}{c} (\beta) \\ \hline (1) \end{array} \left| \begin{array}{c} (1) \\ \hline z_{\omega_1} \end{array} \right. & \begin{array}{c} (2) \\ \hline 0 \end{array} & \begin{array}{c} (n) \\ \hline 0 \end{array} \\ \dots & & \dots \\ \begin{array}{c} (2) \\ \hline 0 \end{array} & \begin{array}{c} (2) \\ \hline z_{\omega_2} \end{array} & \begin{array}{c} (n) \\ \hline 0 \end{array} \\ \dots & & \dots \\ \begin{array}{c} (n) \\ \hline 0 \end{array} & \begin{array}{c} (n) \\ \hline 0 \end{array} & \begin{array}{c} (n) \\ \hline z_{\omega_n} \end{array} \end{array} \quad (21.45)$$

Следовательно, для внешней сети $z_{(\sigma)(\beta)}$ можно рассматривать как совокупность n 2-тензоров, расположенных в строку:

$$z_{(\alpha)} = \begin{array}{c} \begin{array}{c} (\alpha) \\ \hline (1) \end{array} \left| \begin{array}{c} (1) \\ \hline z_{\omega_1} \end{array} \right. \quad \begin{array}{c} (2) \\ \hline z_{\omega_2} \end{array} \quad \dots \quad \begin{array}{c} (n) \\ \hline z_{\omega_n} \end{array} \end{array} \quad (21.46)$$

Подобным образом $y^{(\beta)(\sigma)}$, обратную к $z_{(\sigma)(\beta)}$, можно рассматривать как совокупность n 2-тензоров, расположенных в строку:

$$y^{(\sigma)} = \begin{array}{c} \begin{array}{c} (\sigma) \\ \hline (1) \end{array} \left| \begin{array}{c} (1) \\ \hline z_{\omega_1}^{-1} \end{array} \right. \quad \begin{array}{c} (2) \\ \hline z_{\omega_2}^{-1} \end{array} \quad \dots \quad \begin{array}{c} (n) \\ \hline z_{\omega_n}^{-1} \end{array} \end{array} \quad (21.47)$$

Для внешней сети M есть нуль.

Необходимо заметить, что обращение $z_{(\sigma)(\beta)}$ рассчитывается нахождением обратного для каждого из своих компонент-тензоров. Все они, за исключением частот, в свою очередь имеют одинаковую форму.

Таким же образом $Y^{(\sigma)(\pm\beta)(\tau)(\pm\delta)}$, где $\gamma = \alpha$ и $\delta = \beta$, можно записать на $Y^{(\sigma)(\pm\beta)}$.

Каждая компонента этих двух матриц содержит $Z_{\omega_1 + \omega_2}^{-1}$, все они имеют одинаковую форму, если не вычисляются для различных комбинаций частот. Эти упрощающие замечания используются, когда лампы соединяют с сетью.

Уравнения сети без ламп, с приложенными напряжениями или токами основной и производных частот имеют вид

$$\Delta e_{(\alpha)} + \Delta e_{(\sigma)(\pm\beta)} = z_{(\alpha)(\beta)} \Delta i^{(\beta)} + z_{(\sigma)(\pm\beta)(\tau)(\pm\delta)} \Delta i^{(\tau)(\pm\delta)}, \quad (21.48)$$

$$\Delta I^{(\sigma)} + \Delta I^{(\sigma)(\pm\beta)} = Y^{(\sigma)(\beta)} \Delta E_{(\beta)} + Y^{(\sigma)(\pm\beta)(\tau)(\pm\delta)} \Delta E_{(\tau)(\pm\delta)}. \quad (21.49)$$

I. В ламповой цепи соединены два физически разных типа структур: *нелинейная сеть*, содержащая одну или более изолированных ламп, и *линейная сеть*, соединяющая лампы. Их можно рассматривать как контурные, узловые или ортогональные сети.

Две нелинейные сети или одна линейная и одна нелинейная сеть соединяются способом, аналогичным способу соединения двух линейных сетей (см. гл. 5, § 12 для контурных сетей и гл. 14, § 12 для узловых сетей).

Этапы соединения сетей следующие:

1) устанавливаются геометрические объекты Y и M (или z и h) каждой составляющей части; некоторые из них могут быть нулями;

2) их соответствующие суммы $Y = Y^1 + Y^2 + \dots$ и $M = M_1 + M_2 + \dots$ представляют геометрические объекты примитивной системы;

3) тензор преобразования C или C_t^{-1} устанавливается из рассмотрения способа перестройки примитивной системы в действительную систему; *зажимы ламп всегда образуют часть новой системы координат*;

4) новые компоненты Y' и M' (или z' и h') находят при помощи соответствующих им формул преобразования.

II. Уравнения напряжения или тока результирующей системы (опуская штрихи) имеют вид

$$\Delta e_{(\sigma)} + \Delta e_{(\alpha)(\pm\beta)} = z_{(\sigma)(\beta)} \Delta i^{(\beta)} + z_{(\sigma)(\pm\beta)(\gamma)(\pm\delta)} \Delta i^{(\gamma)(\pm\delta)} + \Delta i^{(\sigma)} h i^{(\beta)}; \quad (21.50)$$

$$\Delta I^{(\alpha)} + \Delta I^{(\alpha)(\pm\beta)} = Y^{(\sigma)(\beta)} \Delta E_{(\beta)} + Y^{(\sigma)(\pm\beta)(\gamma)(\pm\delta)} \Delta E_{(\gamma)(\pm\delta)} + \Delta E_{(\alpha)} M E_{(\beta)}. \quad (21.51)$$

В этих уравнениях (где h и M не имеют закрытых индексов) допускается, что *зажимы лампы (или ламп) рассматриваются как координатные оси*, в которых течет Δi или на которых возникает ΔE .

III. Вместо того чтобы использовать приведенный выше метод нахождения уравнений (21.51) или (21.50), *первый член $Y^{(\sigma)(\beta)}$ можно найти точно таким же способом, как показано в гл. 15, в то время как M результирующей системы находят умножением M лампы на A три раза, изменяя, однако, только ее индексы. Свободные индексы модуляционного члена относятся только к зажимам лампы g и p , в то время как свободные индексы члена усиления включают также другие узловые пары.*

IV. Для удобства манипулирования их можно разделить на несколько тензорных уравнений; например, в уравнении (21.51) можно ввести три типа узловых пар:

1) ΔE_1 , представляющее все узловые пары лампы;

2) ΔE_2 , представляющее активные узловые пары с известными приложенными напряжениями;

3) ΔE_3 , представляющее оставшиеся неактивные узловые пары.

В этом случае уравнение (21.51) разделяется на три, первое содержит член с M . Исключение E_3 влечет только введение адмиттансов разомкнутой сети $Y^{(\alpha)(\beta)}$, тогда как исключение неактивных узловых пар E_1 лампы требует обращения ряда.

Устанавливая уравнение напряжений как контурную сеть, необходимо сначала обратить ряд, так как лишь z_2 и h_2 лампы фигурируют в уравнении, тогда как обратные константы y_2 и m_2 лампы обычно известны.

Попытка найти уравнения, обратные (21.50) и (21.51), или некоторую подсистему этих уравнений, содержащую 3-тензор, потребует введения закрытых индексов и для 3-тензора.

20. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ

1. Уравнения напряжений и токов (21.50) и (21.51) можно решить без подразделений относительно неизвестных (если некоторые из приложенных величин известны).

Для контурных сетей при нахождении уравнения, обратного (21.50), обратный h должен был бы быть (согласно уравнению (21.31)) $m = -y_t(yh)y$, если бы $y = z^{-1}$ не содержало закрытых индексов; но, поскольку z содержит закрытые индексы $(\alpha)(\beta)$, обратный h из уравнения (21.41)

$$m^{(\alpha)(\pm\beta)(\gamma)(\delta)} = -y_t^{(\gamma)}(y^{(\alpha)(\pm\beta)}h)y^{(\delta)}, \quad (21.52)$$

где половина индексов y опущена в соответствии с упрощением § 16.

Поскольку h найдено при известном m как $h = -z_t(zm)z$, уравнение (21.52) для контурных сетей приобретает вид

$$m^{(\alpha)(\pm\beta)(\gamma)(\delta)} = -y_t^{(\gamma)}z_t(y^{(\alpha)(\pm\beta)}zm)zy^{(\delta)}, \quad (21.53)$$

где m — тензор модуляции лампы до соединения с сетью, а $m^{(\sigma)(\pm\beta)(\gamma)(\delta)}$ — ее тензор модуляции после соединения. Точно так же z — тензор импеданса только лампы, а $y^{(\gamma)}$ — тензор адмиттанса соединенной системы.

Следовательно, для контурной сети обратное (21.50) уравнение

$$\Delta i^{(\alpha)} + \Delta i^{(\sigma)(\pm\beta)} = y^{(\sigma)(\beta)} \Delta e_{(\beta)} + \Delta e_{(\gamma)} m^{(\alpha)(\pm\beta)(\gamma)(\delta)} \Delta e_{(\delta)}, \quad (21.54)$$

показывающее изменения токов основных и производных частот, обусловленные изменениями напряжений основных частот $\Delta e_{(\sigma)}$, приложенных к контурам.

Следует отметить, что наличие приложенных напряжений производных частот $\Delta e_{(\alpha)+(\beta)}$ не предполагается.

II. Для *узловых сетей* тензор, обратный известному \mathbf{M} , по аналогии с уравнением (21.52) есть

$$\mathbf{H}_{(\alpha)(\pm\beta)(\gamma)(\delta)} = -\mathbf{Z}_{\lambda(\gamma)}(\mathbf{Z}_{(\alpha)(\pm\beta)}\mathbf{M})\mathbf{Z}_{\lambda(\delta)} \quad (21.55)$$

и уравнение напряжения

$$\Delta E_{(\alpha)} + \Delta E_{(\alpha)(\pm\beta)} = \mathbf{Z}_{(\alpha)(\beta)} \Delta \mathbf{I}^{(\beta)} + \Delta \mathbf{I}^{(\gamma)} \mathbf{H}_{(\alpha)(\pm\beta)(\gamma)(\delta)} \Delta \mathbf{I}^{(\delta)}, \quad (21.56)$$

где $\Delta \mathbf{I}^{(\alpha)}$ — известные приложенные токи основных частот.

III. Мультитензор $\mathbf{m}^{(\alpha)(\pm\beta)(\gamma)(\delta)}$ (или, скорее, $\mathbf{m}^{(\alpha)(\pm\beta)(\gamma)(\pm\delta)}$), содержит $4n^4$ 3-тензоров \mathbf{m} . Из них отличными от нуля являются $2n^2$ 3-тензоров, поскольку в них $\alpha = \gamma$ и $\beta = \delta$, остальные 3-тензоры равны нулю. Их можно расположить в два квадрата, каждый из них содержит n^2 3-тензоров; один — дающий токи $\alpha + \beta$ частот, а в другой — $\alpha - \beta$ частот. Каждый 3-тензор содержит токи одной частоты, текущие в различных цепях.

Если k цепей имеют приложенный вектор напряжений $\Delta e_{i\alpha}$, то каждая цепь содержит n напряжений различных частот, каждое из возможных k^2 произведений дает $2n^2$ токов производных частот в каждой цепи; это значит, что в каждой цепи течет $2n^2 k^2$ токов производных частот и nk токов основных частот.

21. ПРИМЕР КОНТУРНОЙ ЦЕПИ ТРИОДА

I. Пусть сетка и анод триода соединены последовательно с двумя катушками (рис. 21.5) и пусть в сеточном и анодном контурах приложено множество напряжений различных частот.

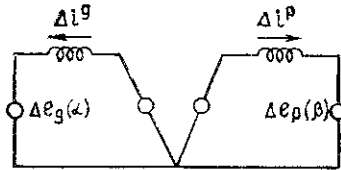


Рис. 21.5. Контурная сеть триода.

Чтобы найти тензор модуляции соединенной сети с помощью уравнения (21.53), надо установить следующие два 2-тензора и один 3-тензор. Тензор адмиттанса \mathbf{y} *соединенной системы* можно найти по методу, описанному в гл. 15, § 15, а \mathbf{z}_1 *одной лампы* дается уравнением (15.55), так что

$$\mathbf{z}_1 = \begin{array}{c} \mathbf{g} \\ \mathbf{p} \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline \frac{r_g}{1 - \mu p^{\mu} g} & \frac{-\mu g^r p}{1 - \mu p^{\mu} g} \\ \hline \frac{\mu p^r g}{1 - \mu p^{\mu} g} & \frac{r_r}{1 - \mu p^{\mu} g} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{c} \mathbf{g} \\ \mathbf{p} \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline a & b \\ \hline c & d \\ \hline \end{array}, \quad (21.57)$$

$$y = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} g & p \\ \hline \left(\frac{r_p}{1 - \mu_p \mu_g} + Z_p \right) / \text{Det} & \frac{\mu_g r_p}{1 - \mu_p \mu_g} / \text{Det} \\ \hline -\frac{\mu_g r_g}{1 - \mu_p \mu_g} / \text{Det} & \left(\frac{r_g}{1 - \mu_p \mu_g} + Z_g \right) / \text{Det} \end{array} \\ \hline \begin{array}{cc} g & p \\ \hline e & f \\ \hline g & h \end{array} \end{array}, \quad (21.58)$$

где $\text{Det} = [(r_g + Z_g)(r_p + Z_p) - Z_p Z_g \mu_p \mu_g] (1 - \mu_p \mu_g)$.

Тензор модуляции m_1 лампы дан уравнением (21.13) как

$$m^{g^v w} = m_{1g} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} w & g & p \\ \hline v & g & p \\ \hline g & k & l \\ \hline p & m & n \end{array} \\ \hline \begin{array}{ccc} w & g & p \\ \hline v & g & p \\ \hline g & p & q \\ \hline p & r & s \end{array} \end{array}, \quad (21.59)$$

II. На первом этапе определяются три произведения матриц из уравнения (21.53). Заменяя $(\alpha) (\pm \beta)$ на (ω) и оставив закрытые индексы прикрепленными к каждой компоненте $y^{(\alpha)}$, $y^{(\beta)}$ и $y^{(\omega)}$, получим

$$\begin{aligned} z_1 y^\beta &= \begin{array}{c} \begin{array}{cc} g & p \\ \hline a e_\beta + b g_\beta & a f_\beta + b h_\beta \\ \hline c e_\beta - d g_\beta & c f_\beta + d h_\beta \end{array} \\ \hline \begin{array}{cc} g & p \\ \hline A & B \\ \hline C & D \end{array} \end{array} = p, \\ (z_1 y^\alpha)_t &= \begin{array}{c} \begin{array}{cc} g & p \\ \hline a e_\alpha + b g_\alpha & c e_\alpha + d g_\alpha \\ \hline a f_\alpha + b h_\alpha & c f_\alpha + d h_\alpha \end{array} \\ \hline \begin{array}{cc} g & p \\ \hline E & F \\ \hline G & H \end{array} \end{array} = s, \\ y^\omega z_1 &= \begin{array}{c} \begin{array}{cc} g & p \\ \hline e_\omega a + f_\omega c & e_\omega b + f_\omega d \\ \hline g_\omega a + h_\omega c & g_\omega b + h_\omega d \end{array} \\ \hline \begin{array}{cc} g & p \\ \hline K & L \\ \hline M & N \end{array} \end{array} = r. \end{aligned}$$

Теперь значения m находят по уравнению (21.53), т. е.

$$m^{\omega \alpha \beta} = (z_1 y^\alpha)_t [(y^\omega z_1)_m] (z_1 y^\beta) = s(r m_1)_p. \quad (21.60)$$

III. Центральное произведение $r m_1$ есть $r_{zu} m^{uvw}$.

Умножая куб m^{uvw} на квадрат r_{zu} по направлению u , как показано на рис. 21.6, имеем, что произведение по первой строке r дает

$$(r m_1)_g = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} g & g & p \\ \hline g & Kk + Lp & Kl + Lq \\ \hline p & Km + Lr & Kn + Ls \end{array} \end{array},$$

а произведение по второй строке r

$$(rm_1)_p = \begin{array}{c|cc} & g & p \\ \hline g & Mk + Np & Ml + Nq \\ \hline p & Mm + Nr & Mn + Ns \end{array}$$

Эти две матрицы образуют часть куба rm_1 . (Умножить можно и другим способом, отличным от показанного.)

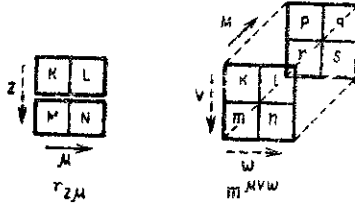


Рис. 21.6. Вычисление произведения $r_{zu} m^{uvw}$.

IV. Каждую из этих матриц следует умножить на s :

$$s(rm_1)_g = \begin{array}{c|cc} & g & p \\ \hline g & E(Kk + Lp) + F(Km + Lr) & E(Kl + Lq) + F(Kn + Ls) \\ \hline p & G(Kk + Lp) + H(Km + Lr) & G(Kl + Lq) + H(Kn + Ls) \end{array}$$

$$s(rm_1)_p = \begin{array}{c|cc} & g & p \\ \hline g & E(Mk + Np) + F(Mm + Nr) & E(Ml + Nq) + F(Mn + Ns) \\ \hline p & G(Mk + Np) + H(Mm + Nr) & G(Ml + Nq) + H(Mn + Ns) \end{array}$$

V. Две последние матрицы умножают на p , как $s(rm_1)_g p$ что дает матрицы-компоненты окончательного куба:

$$m^g = \begin{array}{c|cc} & g & p \\ \hline g & [E(Kk + Lp) + F(Km + Lr)]A + [E(Kl + Lq) + F(Kn + Ls)]C & [E(Kk + Lp) + F(Km + Lr)]B + [E(Kl + Lq) + F(Kn + Ls)]D \\ \hline p & [G(Kk + Lp) + H(Km + Lr)]A + [G(Kl + Lq) + H(Kn + Ls)]C & [G(Kk + Lp) + H(Km + Lr)]B + [G(Kl + Lq) + H(Kn + Ls)]D \end{array}$$

(21.61)

С помощью этой матрицы выражают компоненты производных частот сеточного тока $\Delta i^g = \Delta em^g \Delta e$. Другая матрица куба есть $s = (rm_1)_p p =$

| | p | g | p |
|---------|---|--|---|
| $m^p =$ | g | $[E(Mk+Nr)+F(Mm+Nr)]A + [E(Mk+Nr)+F(Mm+Nr)]B + [E(Ml+Nq)+F(Mn+Ns)]C$ | $[E(Mk+Nr)+F(Mm+Nr)]B + [E(Ml+Nq)+F(Mn+Ns)]D$ |
| | p | $[G(Mk+Nr)+H(Mm+Nr)]A + [G(Mk+Nr)+H(Mm+Nr)]B + [G(Ml+Nq)+H(Mn+Ns)]C$ | $[G(Mk+Nr)+H(Mm+Nr)]B + [G(Ml+Nq)+H(Mn+Ns)]D$ |

(21.62)

С помощью этой матрицы находят компоненты производных частот $\Delta i^p = \Delta \text{em}^p \Delta e$.

Последние две матрицы m^g и m^p — компоненты 3-тензора m , дающие все токи производных частот (если $\omega = \alpha \pm \beta$):

$$\Delta i^{(\omega)} = \Delta e_{(\alpha)} m^{(\omega)(\alpha)(\beta)} \Delta e_{(\beta)}, \quad (21.63)$$

обусловленные напряжениями основных частот $\Delta e_{(\alpha)}$.

VI. Оценим одну из восьми компонент 3-тензора m , скажем, M^{pgg} , т. е. компоненту верхнего левого угла в матрице (21.62):

$$M' = M(AEk + AFm + CEI + CFn) + N(AEp + AFr + CEq + CFs),$$

но

$$M = -\frac{r g^{\mu p} Z_{g\omega}}{D_{\omega}}, \quad A = \frac{r g Z'_{p\beta}}{D_{\beta}}, \quad E = \frac{r g Z'_{p\alpha}}{D_{\alpha}};$$

$$C = -\frac{r g^{\mu p} Z_{p\beta}}{D_{\beta}}, \quad F = -\frac{r g^{\mu p} Z_{p\alpha}}{D_{\alpha} D}, \quad N = \frac{r p Z'_{g\omega}}{D_{\omega}},$$

где

$$D = (r_g + Z_g)(r_p + Z_p) - Z_p Z_{g^{\mu} p^{\mu} g};$$

$$Z' = r + Z; \quad \omega = \alpha \pm \beta.$$

Следовательно, одна из восьми компонент есть

$$M^{(\omega)(\alpha)(\beta)} = \frac{r g^{\mu p} Z_{g\omega}}{2D_{\alpha} D_{\beta} D_{\omega}} \left[Z'_{p\alpha} Z'_{p\beta} \frac{\partial r_g}{\partial e_g} + r_g^2 \mu_p Z_{p\alpha} Z'_{p\beta} \frac{\partial G^{gp}}{\partial e_g} - \mu_p Z_{p\beta} Z'_{p\alpha} \frac{\partial r_g}{\partial e_p} - r_g^2 \mu_p^2 Z_{p\alpha} Z_{p\beta} \frac{\partial G^{gp}}{\partial e_p} \right] +$$

$$+ \frac{r_p Z'_{g\omega}}{2D_{\alpha} D_{\beta} D_{\omega}} \left[\frac{r_g^2}{r_p^2} \mu_p Z_{p\alpha} Z'_{p\beta} \frac{\partial r_p}{\partial e_g} + r_g^2 Z'_{p\alpha} Z'_{p\beta} \frac{\partial G^{pg}}{\partial e_g} - \frac{r_g^2}{r_p^2} \mu_p^2 Z_{p\alpha} Z_{p\beta} \frac{\partial r_p}{\partial e_p} - r_g^2 \mu_p Z_{p\beta} Z'_{p\alpha} \frac{\partial G^{gp}}{\partial e_p} \right]. \quad (21.64)$$

Каждый Z вычисляется для частоты, соответствующей его нижним индексам. Если *сеточное напряжение* — сумма n напряжений различных частот, то имеется $2n^2$ различных компонент $M^{(\omega)(\alpha)(\beta)}$, дающих $2n^2$ различных *анодных токов*:

$$\Delta i^{p(\alpha\pm\beta)} = m p g g^{(\alpha\pm\beta)(\alpha)(\beta)} \Delta e_{g(\alpha)} \Delta e_{g(\beta)} \quad (21.65)$$

в предположении, что α и β пробегает диапазон частот 1, 2, (или $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$). В уравнении p и g — фиксированные открытые индексы.

Когда аналогично уравнению (21.63) рассчитывают все восемь компонент m , каждой частоте тока $\Delta i^{(\omega)} = \Delta i^{(\alpha\pm\beta)}$ соответствует куб. В общей сложности имеется $2n^2$ кубов, каждый из которых дает частный ток одной производной частоты, текущий во всей цепи. Все токи, данные в кубе, имеют одну частоту

АНАЛИЗ СЕТЕЙ

1. ТИПЫ СЕТЕВЫХ ЗАДАЧ

I. Задачи, возникающие при изучении сетей, можно разбить на две основные группы: 1) *дана сеть, нужно установить ее свойства*, а именно: различные токи, напряжения, мощности, импедансы данной сети; такие задачи встречаются в «анализе сетей»; 2) *даны свойства сети, требуется найти саму сеть*; например, нужно определить, каковы должны быть импедансы сети, чтобы сеть обеспечивала постоянные токи на некоторых нагрузках; такие задачи встречаются в «синтезе сетей».

II. Анализ сетей может включать простые или сложные действия с тензорными уравнениями в зависимости от рассматриваемой задачи. Простыми действиями являются:

1) при заданной сети и некоторых токах и напряжениях найти токи, напряжения, мощность в других частях сети;

2) изменено значение некоторых токов, напряжений или импедансов сети, найти изменения в различных частях сети.

Более сложными действиями являются:

3) сделаны такие изменения, что отклик сети в некоторой узловой паре или контуре является *максимальным* или *минимальным*, например, могут изменяться некоторые импедансы так, чтобы выходная мощность на определенных нагрузках была максимальной;

4) изменения, которые надо сделать, зависят от данных, которые еще надо найти.

Хотя во многих задачах геометрические объекты преобразовать легко, *решения* уравнений могут стать неуправляемыми или невозможными и тогда нужно прибегать к аппроксимации и пошаговому решению. Такие случаи, например, встречаются в анализе при наличии *абсолютных значений* или фазовых углов напряжений, токов или импедансов.

Все рассматриваемые сети будем считать активными и *асимметричными*, следовательно, в них могут входить многоэлектродные лампы, вращающиеся электрические машины и другие линейные электрические и механические сети.

III. *Огромное преимущество формулировки и решения* (если возможно) *сетевых задач в терминах тензорных уравнений заключается в том, что каждый тип задач можно изучить раз и*

навсегда независимо от количества контуров или узловых пар, от способа соединения катушек или способа их возбуждения. Анализ нужно провести только однажды, и конечный результат можно использовать для каждого конкретного случая одним и тем же способом автоматически.

При обычном способе анализа как вывод уравнений, так и весь метод анализа следует повторять для каждого отдельного случая, возникающего в инженерной практике. Поскольку в обычном анализе огромное количество катушек, огромное разнообразие соединений и гипотетических координатных систем затрудняют задачу, очень часто для каждого конкретного случая требуется отдельный метод решения. Во многих случаях анализ просто прекращается уже после первых шагов из-за механических трудностей оперирования с огромным числом уравнений.

2. МЕТОД РАССУЖДЕНИЯ

I. Задачи анализа систем можно сформулировать так: дана сеть, *найти ее свойства*. Нечислимое множество задач, возникающих при исследовании сетей, не позволяет указать общий способ решения. Во многих случаях предпринимаются следующие шаги:

1) устанавливается, будет ли рассматриваться сеть как контурная, узловая или полная;

2) выводится уравнение поведения сети;

3) устанавливается количество типов контуров и узловых пар, однотипные контуры или узловые пары выполняют одинаковые функции;

4) уравнение поведения разделяют на столько инвариантных уравнений, сколько есть типов контуров или узловых пар, как показано в уравнениях (19.1) и (19.6);

5) *система тензорных уравнений преобразуется аналогично обычным уравнениям* в соответствии с требованиями задачи,

6) неизвестные, если они есть, находят точными или приближенными методами.

II. При анализе ортогональных компаунд-сетей следует помнить, что:

1) при выводе компаунд Z наличие неактивных компаунд-узловых пар просто игнорируется; неактивные компаунд-контуры исключаются по формулам редукции (см. гл. 10);

2) при выводе компаунд Y наличие неактивных компаунд-контуров просто игнорируется; неактивные компаунд-узловые пары исключаются по формулам редукции (см. гл. 10).

Таким образом, исключая или игнорируя неактивные контуры и узловые пары, анализ сетей можно проводить только в терминах активных контуров и узловых пар.

III. Будут разработаны два типа задач как примеры этого метода исследования: 1) дана приложенная величина, найти отклик; 2) даны изменения величин, определить отклик.

При анализе обычно нужно провести такое количество обращений матриц, сколько есть типов контуров и узловых пар. Аналогично каждая матрица будет иметь только столько строк и столбцов, сколько осей имеется в соответствующей группе контуров или узловых пар.

Отметим, что каждый тип контуров или узловых пар может содержать любое число отдельных контуров или узловых пар.

При операциях с уравнениями нужно постоянно помнить, что даже в качестве промежуточного шага можно использовать обращение только квадратного 2-тензора. Такие тензоры являются обычно только диагональными компонентами компаунд-2-тензора.

3. АНАЛИЗ π -СЕТЕЙ

I. При заданном входе E_1 и выходе I^2 следует найти входной ток I^1 и разность потенциалов E_2 на нагрузке.

Узловые пары сетей бывают трех типов: входные, выходные и неактивные; последние включают все остальные узловые пары (рис. 22.1, а). Если неактивные узловые пары исключаются из

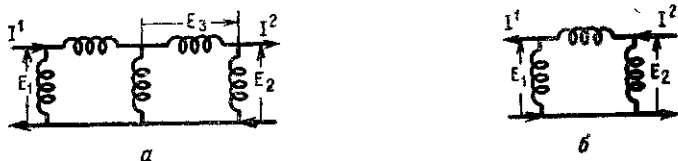


Рис. 22.1.

а — данная узловая сеть (3 узловые пары); б — редуцированная (уменьшенная) сеть (2 узловые пары). Дано: E_1 , I^2 ; найти: I^1 , E_2 .

уравнения тока методами, описанными в гл. 10, § 9, остаются только входные и выходные узловые пары (рис. 22.1, б), уравнения для которых заданы в (19.2):

$$I^1 = Y^{11}E_1 - Y^{12}E_2, \quad (22.1)$$

$$I^2 = Y^{21}E_1 - Y^{22}E_2.$$

Штрихи опущены.

II. Напряжения нагрузки E_2 находят из второго уравнения

$$E_2 = Y^{22-1}(Y^{21}E_1 - I^2) \quad (22.2)$$

вычислением тензора, обратного Y^{22} , имеющего столько строк и столбцов, сколько имеется осей нагрузки.

Входной ток I^1 находят подстановкой E_2 в первое уравнение:

$$I^1 = Y^{11}E_1 - Y^{12}Y^{22-1}(Y^{21}E_1 - I^2),$$

$$I^1 = (Y^{11} - Y^{12}Y^{22-1}Y^{21})E_1 + Y^{12}Y^{22-1}I^2. \quad (22.3)$$

4. НАПРЯЖЕНИЯ ОТКРЫТОЙ ЦЕПИ

I. При заданном входе E_1 и выходе I^2 найти разность потенциалов E_3 на нескольких (не всех) из оставшихся узловых пар.

Имеется *четыре* типа узловых пар (рис. 22.2, а): входные, выходные, зажимы открытой цепи и неактивные. Компонент-сеть должна иметь соответственно четыре узловых пары (или пять узлов).

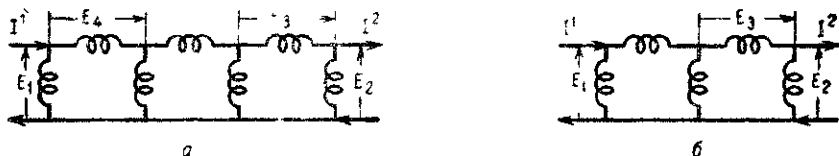


Рис. 22.2.

а — дающая узловую сеть (4 узловые пары); б — редуцированная сеть (3 узловые пары).
Дано: E_1, I^2 ; найти: E_3 .

Уравнение тока $I = YE$ узловой сети должно быть разделено на *четыре* уравнения. Если неактивное уравнение *не исключается*, эти четыре уравнения имеют вид

$$I^1 = Y^{11}E_1 - Y^{12}E_2 - Y^{13}E_3 - Y^{14}E_4,$$

$$I^2 = Y^{21}E_1 - Y^{22}E_2 - Y^{23}E_3 - Y^{24}E_4,$$

$$0 = Y^{31}E_1 - Y^{32}E_2 - Y^{33}E_3 - Y^{34}E_4,$$

$$0 = Y^{41}E_1 - Y^{42}E_2 - Y^{43}E_3 - Y^{44}E_4. \quad (22.4)$$

Все *диагональные* тензоры Y^{11}, Y^{22}, Y^{33} и Y^{44} имеют квадратные матрицы и обратные им могут быть найдены.

Задача состоит в том, чтобы найти E_3 , если известны E_1 и I^2 .

II. Первый этап — исключить неактивное E_4 из последнего уравнения:

$$E_4 = Y^{44-1}(Y^{41}E_1 - Y^{42}E_2 - Y^{43}E_3).$$

Подставив в остальные уравнения, получим

$$I^1 = (Y^{11} - Y^{14}Y^{44-1}Y^{41})E_1 - (Y^{12} - Y^{14}Y^{44-1}Y^{42})E_2 - (Y^{13} - Y^{14}Y^{44-1}Y^{43})E_3,$$

$$I^2 = (Y^{21} - Y^{24}Y^{44-1}Y^{41})E_1 - (Y^{22} - Y^{24}Y^{44-1}Y^{42})E_2 -$$

$$- (Y^{23} - Y^{24}Y^{44-1}Y^{43})E_3, \quad (22.5)$$

$$0 = (Y^{31} - Y^{34}Y^{44-1}Y^{41})E_1 - (Y^{32} - Y^{34}Y^{44-1}Y^{42})E_2 -$$

$$- (Y^{33} - Y^{34}Y^{44-1}Y^{43})E_3.$$

Если требуется, заменяем их на

$$\begin{aligned} I^1 &= Y^{11'} E_1 - Y^{12'} E_2 - Y^{13'} E_3, \\ I^2 &= Y^{21'} E_1 - Y^{22'} E_2 - Y^{23'} E_3, \\ 0 &= Y^{31'} E_1 - Y^{32'} E_2 - Y^{33'} E_3, \end{aligned} \quad (22.6)$$

представляющие собой эквивалент двойной π -сети с тремя узловыми парами (рис. 22.2, б). Адмиттансы со штрихами это собственные и взаимные адмиттансы первых трех узловых пар, измеренные при разомкнутой четвертой узловой паре, аналогично адмиттансам уравнения (22.1).

III. В последней системе уравнений E_1 и I^2 известны, а E_3 следует найти. Получая E_2 из второго уравнения

$$E_2 = Y^{22'-1} (Y^{21'} E_1 - Y^{23'} E_3 - I^2)$$

и подставляя его в третье

$$0 = Y^{31'} E_1 - Y^{32'} Y^{22'-1} (Y^{21'} E_1 - Y^{23'} E_3 - I^2) - Y^{33'} E_3,$$

получаем уравнение, содержащее только известные E_1 и I^2 и неизвестное E_3 . Приведем подобные члены

$$0 = (Y^{31'} - Y^{32'} Y^{22'-1} Y^{21'}) E_1 - (Y^{33'} - Y^{32'} Y^{22'-1} Y^{23'}) E_3 + Y^{32'} Y^{22'-1} I^2$$

и, разрешая относительно неизвестной E_3 , получаем

$$\begin{aligned} E_3 &= (Y^{33'} - Y^{32'} Y^{22'-1} Y^{23'})^{-1} [(Y^{31'} - Y^{32'} Y^{22'-1} Y^{21'}) E_1 + \\ &\quad + Y^{32'} Y^{22'-1} I^2]. \end{aligned} \quad (22.7)$$

IV. При вычислении E_3 нужно найти три обратные матрицы:

1) обратную Y^{44} , содержащую столько строк и столбцов, сколько имеется неактивных узловых пар (E_4);

2) обратную $Y^{22'} = Y^{22} - Y^{24} Y^{44-1} Y^{42}$, содержащую столько столбцов и строк, сколько их в Y^{22} , т. е. столько, сколько имеется узловых пар нагрузки;

3) обратную $Y^{33'} = Y^{32'} Y^{22'-1} Y^{23'}$, имеющую столько строк и столбцов, сколько их в $Y^{33} = Y^{33} - Y^{34} Y^{44-1} Y^{43}$ или в Y^{33} , т. е. столько, сколько имеется зажимов разомкнутой цепи.

5. КОНТУРНЫЕ ТОКИ В ОРТОГОНАЛЬНОЙ СЕТИ

I. Чтобы получить пример задачи с ортогональной сетью, предположим, что ток I^j , проходящий через *некоторые* (не все) узловые пары сети во внешней нагрузке, известен (рис. 22.3, а). Найдем все токи контуров i^m .

Поскольку напряжения роли не играют, пишем уравнение для напряжения $E + e = z(i + I)$, содержащее столько уравнений, сколько всего имеется контуров и требуемых узловых пар. В дан-

ном примере число известных токов то же, что и число требуемых узловых пар.

Ортогональные уравнения напряжения можно вывести из уравнения (19.3) в виде

$$0 = z_{mm}i^m - z_{mj}I^j, \quad (22.8)$$

$$E_j = z_{jm}i^m - z_{jj}I^j,$$

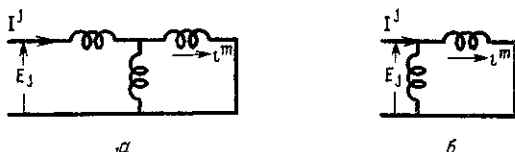


Рис. 22.3.

a — данная узловая сеть (1 контур, 2 узловые пары); *б* — пренебрежение неактивной узловой парой. Дано: I^j ; найти: i^m .

поскольку нет приложенных напряжений в катушках e_m . В этих уравнениях I известны, а i^m (и E_j) неизвестны. *Неизвестные токи контуров находят* из первого уравнения

$$i^m = + z_{mm}^{-1} z_{mj} I^j. \quad (22.9)$$

Матрица z_{mm} , обратную которой нужно найти, имеет столько строк и столбцов, сколько есть контуров. Числовой пример был

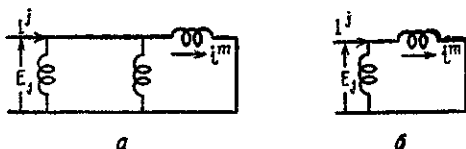


Рис. 22.4.

a — данная ортогональная сеть (2 контура, 1 узловая пара); *б* — пренебрежение активным контуром при получении Y . Дано: E_j ; найти i^m .

рассмотрен в гл. 16, § 11 с приложенными в контурах напряжениями e_m .

II. Пусть вместо I известно E (рис. 22.4) и пусть некоторые (не все) контурные токи i^m найдены. В этом случае пишем уравнение тока $i + I = Y(E + e)$, в котором столько уравнений, сколько *всего* узловых пар и контуров. (Если нужно найти только некоторые контурные токи, количество контуров берется меньше, чем количество всех контуров.) При получении Y неактивными контурами можно пренебречь, рассматривая только требуемые контуры.

Ортогональные уравнения токов из уравнения (19.5) (где $\mathbf{e}_m = \mathbf{e}_j = \mathbf{i}^m = \mathbf{i}^j = \mathbf{E}_m = 0$) имеют вид

$$\mathbf{i}^m = \mathbf{Y}^{mj} \mathbf{E}_j, \quad \mathbf{I}^j = \mathbf{Y}^{jj} \mathbf{E}_j. \quad (22.10)$$

Токи \mathbf{i}^m находят, не вычисляя обратные матрицы.

III. Пусть вновь известен ток \mathbf{I} , проходящий через *некоторые* узловые пары, и пусть требуется найти только *некоторые* из контурных токов \mathbf{i}^m . Теперь контуры следует разделить на два вида, в то время как из узловых пар используются только *исследуемые* (рис. 22.5).



Рис. 22.5.

а — данная ортогональная сеть (2 контура, 2 узловые пары); б — пренебрежение неактивными узловыми парами.

Таким образом, в ортогональном уравнении напряжения первое уравнение (представляющее контурные оси) делится на два:

$$\begin{aligned} z_{m1m1} \mathbf{i}^{m1} + z_{m1m2} \mathbf{i}^{m2} - z_{m1j1} \mathbf{I}^{j1} &= 0 = z_{11} \mathbf{i}^1 + z_{12} \mathbf{i}^2 - z_{13} \mathbf{I}^3, \\ z_{m2m1} \mathbf{i}^{m1} + z_{m2m2} \mathbf{i}^{m2} - z_{m2j1} \mathbf{I}^{j1} &= 0 = z_{21} \mathbf{i}^1 + z_{22} \mathbf{i}^2 - z_{23} \mathbf{I}^3, \\ z_{j1m1} \mathbf{i}^{m1} + z_{j1m2} \mathbf{i}^{m2} - z_{j1j1} \mathbf{I}^{j1} &= \mathbf{E} = z_{31} \mathbf{i}^1 + z_{32} \mathbf{i}^2 - z_{33} \mathbf{I}^3, \end{aligned} \quad (22.11)$$

где \mathbf{i}^1 представляет те контурные токи, которые нужно найти; \mathbf{i}^2 — остальные контурные токи; \mathbf{I}^3 — токи узловых пар (рис. 22.5, б). В этих уравнениях \mathbf{I}^3 известен, а \mathbf{i}^1 требуется найти (\mathbf{E}_3 — неизвестно).

Исключая \mathbf{i}^2 из второго уравнения, получаем

$$\mathbf{i}^2 = z_{22}^{-1} (z_{23} \mathbf{I}^3 - z_{21} \mathbf{i}^1). \quad (22.12)$$

Подставляя в первое уравнение, имеем

$$\mathbf{0} = z_{11} \mathbf{i}^1 + z_{12} z_{22}^{-1} (z_{23} \mathbf{I}^3 - z_{21} \mathbf{i}^1) - z_{13} \mathbf{I}^3.$$

Перегруппируем и получим

$$(z_{11} - z_{12} z_{22}^{-1} z_{21}) \mathbf{i}^1 = (z_{13} - z_{12} z_{22}^{-1} z_{23}) \mathbf{I}^3.$$

Отсюда *контурные токи \mathbf{i}^1 , выраженные через узловые токи \mathbf{I}^3 ,*

$$\mathbf{i}^1 = (z_{11} - z_{12} z_{22}^{-1} z_{21})^{-1} (z_{13} - z_{12} z_{22}^{-1} z_{23}) \mathbf{I}^3. \quad (22.13)$$

Две обратные матрицы, которые надо вычислить, имеют столько строк, сколько имеется неактивных и активных контуров соответственно.

Токи i^2 в неактивных контурах можно найти из уравнения (22.12), а разности потенциалов E на узловых парах — при подстановке значений i^1 и i^2 в третье уравнение (22.11).

6. ТРИОДНЫЕ ЦЕПИ

I. В гл. 15, § 17 было показано, что триод можно заменить одной анодной катушкой с сердечником и импедансом r_p с последовательно приложенным напряжением $\mu_p E_g$, где E_g — разность потенциалов между сеткой и катодом. Следовательно, если сеточная катушка исключается и количество контуров уменьшается на один, его заменяют узловой парой. При нескольких лампах исключается несколько контуров и их место занимает столько же узловых пар.

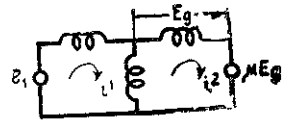


Рис. 22.6. Ламповая сеть как ортогональная сеть. Дано: e_1 ; найти i^1, i^2

При замене сеточной катушки на $\mu_p E_g$ количество уравнений, которые надо написать, не уменьшается, поскольку контурная сеть заменяется ортогональной. Однако ранг матрицы, обратную которой надо вычислить, уменьшается. Ранг этой матрицы равен числу контуров.

II. Рассмотрим ортогональную сеть (рис. 22.6) и рассчитаем ее тензор импеданса z , временно закорачивая сеточные узловые пары.

Все другие узловые пары неактивные, и при получении z их можно не учитывать.

После того как найдено z для данной сети, которая рассматривается как ортогональная, контуры сети можно разделить на два типа — содержащие μE_g и все остальные. Таким образом, соответствующая ортогональная сеть имеет два контура и одну узловую пару (рис. 22.6) и для нее уравнение напряжений имеет вид

$$\begin{aligned} e_1 &= z_{11}i^1 + z_{12}i^2, \\ \mu E_g &= z_{21}i^1 + z_{22}i^2, \\ -E_g &= z_{23}i^1 + z_{32}i^2 \end{aligned} \quad (22.14)$$

при нулевом токе узловой пары I^3 .

Следует отметить, что имеется два приложенных контурных напряжения e_1 и μE_g (где μ имеет диагональную матрицу), но из них известно только одно e_1 ; другое является функцией разности потенциалов E_g на компаунд-узловой паре.

III. E_g можно исключить, подставляя третье уравнение во второе:

$$\begin{aligned} -\mu(z_{31}i^1 + z_{32}i^2) &= z_{21}i^1 + z_{22}i^2, \\ (\mu z_{31} + z_{21})i^1 + (\mu z_{32} + z_{22})i^2 &= 0. \end{aligned}$$

Тогда оставшиеся два уравнения имеют вид

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{z}_{11} \mathbf{i}^1 + \mathbf{z}_{12} \mathbf{i}^2, \quad (22.15)$$

$$0 = \mathbf{z}'_{21} \mathbf{i}^1 + \mathbf{z}'_{22} \mathbf{i}^2,$$

где

$$\mathbf{z}'_{21} = \mu \mathbf{z}_{31} + \mathbf{z}_{21} \quad \text{и} \quad \mathbf{z}'_{22} = \mu \mathbf{z}_{32} + \mathbf{z}_{22}. \quad (22.16)$$

В этих двух тензорных уравнениях сеточные узловые пары отсутствуют. Второе уравнение представляет собой анодные, а первое уравнение — остальные контуры, причем некоторые из них имеют приложенные напряжения.

С этого момента анализ становится таким же, как и для любой другой компаунд-контурной сети. Контуры, представленные первым уравнением (22.14), можно подразделить далее на контуры с приложенными напряжениями и без них или контуры эти можно разделить на входные, выходные и неактивные, или по любому другому признаку.

7. ОБЩИЕ ПАРАМЕТРЫ ЦЕПИ

1. В задачах линий передач часто получается, что входные величины \mathbf{E}_1 и \mathbf{I}^1 или $(\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{i}^1)$ известны, тогда как выходные величины \mathbf{E}_2 и \mathbf{I}^2 (или \mathbf{e}_2 и \mathbf{i}^2) неизвестны. Систему передачи будем рассматривать как узловую сеть.

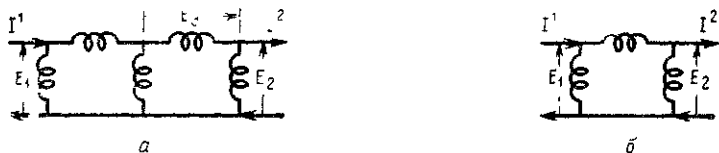


Рис. 22.7:

a — данная узловая сеть (3 узловые пары); *б* — редуцированная сеть (2 узловые пары).
Дано: $\mathbf{E}_1, \mathbf{I}^1$; найти $\mathbf{E}_2, \mathbf{I}^2$.

В рассматриваемом случае имеется три вида узловых пар: входные, выходные и неактивные (рис. 22.7). Исключая неактивные оси по методу, описанному в гл. 10, § 9, получаем уравнения входных и выходных узловых пар (рис. 22.7, б):

$$\mathbf{I}^1 = \mathbf{Y}^{11} \mathbf{E}_1 - \mathbf{Y}^{12} \mathbf{E}_2, \quad \mathbf{I}^m = \mathbf{Y}^{mn} \mathbf{E}_n - \mathbf{Y}^{mv} \mathbf{E}_v, \quad (22.17)$$

$$\mathbf{I}^2 = \mathbf{Y}^{21} \mathbf{E}_1 - \mathbf{Y}^{22} \mathbf{E}_2, \quad \mathbf{I}^u = \mathbf{Y}^{un} \mathbf{E}_n - \mathbf{Y}^{uv} \mathbf{E}_v,$$

где \mathbf{E}_1 и \mathbf{I}^1 известны, а \mathbf{E}_2 и \mathbf{I}^2 — неизвестны.

II. Исключая E_2 из второго уравнения, получаем

$$E_2 = Y^{22-1}(Y^{21}E_1 - I^2). \quad (22.18)$$

Подставляем в первое уравнение

$$I^1 = Y^{11}E_1 - Y^{12}Y^{22-1}(Y^{21}E_1 - I^2).$$

Преобразуем

$$I^1 = (Y^{11} - Y^{12}Y^{22-1}Y^{21})E_1 + Y^{12}Y^{22-1}I^2. \quad (22.19)$$

В последнем уравнении неизвестной является I^2 . Разрешаем его относительно I^2 :

$$I^2 = Y^{22}Y^{12-1}[I^1 - (Y^{11} - Y^{12}Y^{22-1}Y^{21})E_1],$$

$$I^2 = Y^{22}Y^{12-1}I^1 - Y^{22}Y^{12-1}Y^{11}E_1 + Y^{21}E_1.$$

Таким образом, выходной ток выражений через входные величины имеет вид

$$I^2 = (Y^{21} - Y^{22}Y^{12-1}Y^{11})E_1 + Y^{22}Y^{12-1}I^1. \quad (22.20)$$

Так как нужно найти обратный Y^{12} , заметим, что Y^{12} является квадратным тензором, когда выбранное число входных и выходных узловых пар одинаково.

Если компаунд-входные и выходные зажимы имеют разное количество узловых пар, уравнение (22.20) представляет для каждой отдельной сети систему обычных линейных уравнений, в которой число неизвестных (компонент I^2) меньше или больше числа уравнений (компонент I^1). Такие линейные уравнения можно решать по методу, описанному в гл. 10, § 16.

Подставляя найденные выше значения I^2 в уравнение (22.18), получаем

$$E_2 = Y^{22-1}Y^{21}E_1 - Y^{22-1}(Y^{21} - Y^{22}Y^{12-1}Y^{11})E_1 - Y^{12-1}I^1.$$

Таким образом, выходные напряжения выражаются через входные в виде

$$E_2 = Y^{12-1}Y^{11}E_1 - Y^{12-1}I^1. \quad (22.21)$$

Два приведенных выше уравнения можно записать так:

$$E_2 = AE_1 + BI^1, \quad E_u = A_u^m E_m + B_{um} I^m, \quad (22.22)$$

$$I_2 = CE_1 + DI^1, \quad I^u = C^{um} E_m + D^u_m I^m,$$

где коэффициенты при выходных величинах называются «общими параметрами цепи» и определяются выражениями

$$\begin{aligned} A &= Y^{12-1}Y^{11} & A_u^m &= Z_{um}Y^{mn}, \\ B &= -Y^{12-1}, & B_{um} &= -Z_{um}, \\ C &= Y^{21} - Y^{22}Y^{12-1}Y^{11}, & C^{um} &= Y^{um} - Y^{uv}Z_{vn}Y^{nm}, \\ D &= Y^{22}Y^{12-1}, & D^u_m &= Y^{uv}Z_{vm}. \end{aligned} \quad (22.23)$$

Следует особо отметить, что каждый из общих параметров цепи имеет индексы в различных позициях.

III. Эти параметры не являются независимыми друг от друга, если сеть симметрична.

В этом случае $Y^{12} = Y_t^{21}$, а $Y^{11} = Y_t^{11}$ и $AD_t - BC_t = Y^{12-1} Y^{11} \times Y_t^{12-1} Y_t^{22} + Y^{12-1} (Y_t^{21} - Y_t^{11} Y_t^{12-1} Y_t^{22}) = Y^{12-1} Y_t^{21} = I$ — единичный тензор.

Таким образом,

$$AD_t - BC_t = I, \quad A_u^m D_m^v - B_{um} C^{mv} = \delta_u^v. \quad (22.24)$$

С помощью этих уравнений выходные величины можно найти путем измерений на входе.

Аналогичные соотношения можно установить для контурной сети с заменой z на Y .

8. РАСПРЕДЕЛИТЕЛЬНЫЕ СЕТИ

I. В распределительной сети узловые пары, как правило, *поддерживаются при постоянной разности потенциалов E с помощью регулятора напряжения*. Точнее, абсолютное значение $\sqrt{E_1^2 + E_2^2}$ каждой компоненты $E_1 + jE_2$ величины E остается постоянным, тогда как другие величины меняются. Соответствующее I равно нулю.

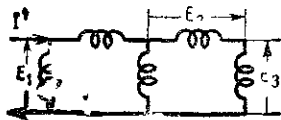


Рис. 22.8. Распределительная сеть (3 узловые пары).

Дано: $\rightarrow E, \{ E_2 \}$; найти:
 $\rightarrow E_2, \{ E_1 \}$.

В качестве простого примера задачи на распределительную сеть рассмотрим узловые пары, разделенные на три части (рис. 22.8):

- 1) одна часть содержит генераторы E_1 ; абсолютное значение каждой компоненты E_1 неизвестно, но их фазовые углы даны;
- 2) другая часть содержит регулятор напряжений E_2 ; абсолютное значение каждой компоненты E_2 известно, а их фазовые углы неизвестны;
- 3) остальные узловые пары с разностью потенциалов E_3 неактивны.

Уравнения тока узловой сети $I = YE$ разделяются на *три* тензорных уравнения:

$$\begin{aligned} I &= Y^{11} E_1 - Y^{12} E_2 - Y^{13} E_3, \\ 0 &= Y^{21} E_1 - Y^{22} E_2 - Y^{23} E_3, \\ 0 &= Y^{31} E_1 - Y^{32} E_2 - Y^{33} E_3. \end{aligned} \quad (22.25)$$

II. Исключая неактивные E_3 из третьего уравнения, получаем

$$E_3 = Y^{33-1} (Y^{31} E_1 - Y^{32} E_2).$$

Подставляем его во второе уравнение

$$0 = Y^{21}E_1 - Y^{22}E_2 - Y^{23}Y^{33-1}(Y^{31}E_1 - Y^{32}E_2)$$

и получаем следующее соотношение между напряжением генератора и напряжением регулятора E_2 :

$$(Y^{21} - Y^{23}Y^{33-1}Y^{31})E_1 = (Y^{22} - Y^{23}Y^{33-1}Y^{32})E_2. \quad (22.26)$$

Матрица Y^{22} является квадратной, как и матрица $Y^{22} - Y^{23}Y^{33-1}Y^{32}$. Решая относительно E_2 , получаем

$$E_2 = (Y^{22} - Y^{23}Y^{33-1}Y^{32})^{-1}(Y^{21} - Y^{23}Y^{33-1}Y^{31})E_1, \quad (22.27)$$

$$E_2 = Y^{22'-1}Y^{21'}E_1 = Y_2^1 E_1. \quad (22.28)$$

Это уравнение дает соотношение между напряжением генератора E_1 и напряжением регулятора E_2 . *Неизвестными являются абсолютные значения E_1 и фазовый угол E_2* . Матрица Y_2^{-1} имеет столько столбцов, сколько есть регуляторов напряжения, и столько строк, сколько генераторов. Точный способ решения таких уравнений здесь не рассматривается.

III. В частных случаях можно найти *приближенное* решение; например: если число генераторов совпадает с числом регуляторов; если все генераторы и регуляторы напряжения работают в фазе.

Поскольку компоненты E_1 и E_2 — действительные числа, уравнение (22.28) можно разрешить с *использованием только действительной части Y_2^1* , а именно Y^r , где $Y_2^1 = Y^r + jY^i$, так что уравнение $E_{2r} = Y^r E_{1r}$ можно решить в виде

$$E_{1r} = Y^{r-1} E_{2r}. \quad (22.29)$$

Оно задает неизвестные генерированные напряжения $|E_1|$.

IV. Если предполагается, что в фазе находятся только генерированные напряжения ($E_1 = E_{1r}$), то действительные и мнимые компоненты $E_2 = E_{2r} + jE_{2i}$ можно найти методом *последовательных приближений*, если абсолютные значения каждой компоненты известны.

Таким образом, если E_1 имеет только действительные значения, уравнение (22.28) можно записать в форме

$$E_{2r} = Y^r E_{1r}, \quad E_{2i} = Y^i E_{1r}. \quad (22.30)$$

Далее делаем следующее:

1) находим E_{1r} из первого уравнения, полагая абсолютное значение каждой компоненты E_2 равным действительной компоненте E_{2r} ;

2) подставляя E_{1r} во второе уравнение, получаем мнимые компоненты E_{2i} ;

3) при известном абсолютном значении каждой компоненты E_2 и их мнимых частей из уравнения $(E)^2 = (E_r)^2 + (E_i)^2$ можно рассчитать *вещественные значения* каждой компоненты E_2 .

Если известны более точные значения описанных выше E_{2r} , действия можно повторить несколько раз, улучшая последовательно точность определения E_{2r} и E_{2j} .

Генераторные токи I^1 находим при подстановке значений E_1 , E_2 и E_3 (данных в уравнении (22.29)) в первое уравнение (22.25).

9. ИЗМЕНЕНИЯ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИНАХ

I. Если токи и напряжения в цепи подвержены возмущениям ΔE и ΔI , то в силу линейности системы каждое возмущение вызывает собственный отклик независимо от наличия E и I в момент возмущения. Это можно видеть из рассмотрения контурной сети, для которой уравнение напряжения до возмущения есть $e=zi$.

При изменении e до $e+\Delta e$ и i до $i+\Delta i$ (при неизменном z) уравнение напряжения *после* изменения есть $e+\Delta e=z(i+\Delta i)$.

Вычитая исходное уравнение $e=zi$, получаем *уравнение для изменения напряжения* $\Delta e=z\Delta i$.

Таким образом, для Δe , ΔE , Δi и ΔI для e , E , i и I применяют одни и те же уравнения. Следовательно, для *изучения изменений в сети при условии, что сама сеть неизменна, применяют следующие уравнения*:

$$\Delta e = z\Delta i, \quad (\Delta E + \Delta e) = z(\Delta i + \Delta I), \quad (22.31)$$

$$\Delta I = Y\Delta E, \quad (\Delta i + \Delta I) = Y(\Delta E + \Delta e).$$

II. При наличии нескольких типов контуров и узловых пар *результатирующие уравнения разделяются на несколько тензорных аналогично уравнениям (19.1)–(19.6)*. Например, $\Delta e=z\Delta i$ разделяется на

$$\begin{aligned} \Delta e_1 &= z_{11}\Delta i^1 + z_{12}\Delta i^2 + z_{13}\Delta i^3 + \dots, \\ \Delta e_2 &= z_{21}\Delta i^1 + z_{22}\Delta i^2 + z_{23}\Delta i^3 + \dots, \end{aligned} \quad (22.32)$$

$$\Delta e_3 = z_{31}\Delta i^1 + z_{32}\Delta i^2 + z_{33}\Delta i^3 + \dots$$

.

III. *Изменения могут быть любой величины, большими или малыми*. Изменение, скажем, ΔE может заключаться в уменьшении некоторых компонент E до нуля.

В нелинейных сетях, например в цепях многоэлектродных ламп, изменения ΔE и ΔI могут быть только небольшими.

10. ИЗМЕНЕНИЕ В π -СЕТИ

1. Пусть дана сеть с узловыми парами трех видов: входными, выходными и неактивными (рис. 22.9, а). Будем исследовать два вида изменений.

1. Пусть изменяется нагрузка. Ток нагрузки I^2 изменяется на ΔI^2 , а приложенное напряжение E_1 остается постоянным. Вопрос

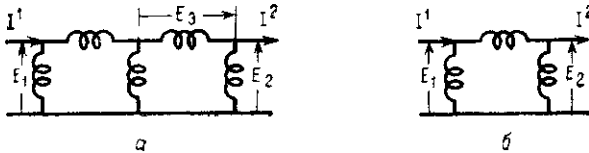


Рис. 22.9.

а — данная узловая сеть (3 узловые пары), б — редуцированная сеть (2 узловые пары).
Дано ΔI^2 , ΔE_1 , найти ΔE_2 , ΔI^1 .

заключается в том, насколько изменится напряжение на нагрузке E_2 и входной ток I^1 .

Исключая неактивные оси ΔE_3 , получаем уравнение эквивалентной π -сети (рис. 22.9, б):

$$\Delta I^1 = Y^{11} \Delta E_1 - Y^{12} \Delta E_2, \quad (22.33)$$

$$\Delta I^2 = Y^{21} \Delta E_1 - Y^{22} \Delta E_2.$$

Поскольку приложенное напряжение E_1 не меняется, то $\Delta E_1 = 0$ и уравнения принимают вид

$$\Delta I^1 = -Y^{12} \Delta E_2, \quad \Delta I^2 = -Y^{22} \Delta E_2.$$

Изменение напряжения на зажимах нагрузки (из второго уравнения)

$$\Delta E_2 = -Y^{22-1} \Delta I^2. \quad (22.34)$$

Подставляя ΔE_2 в первое из уравнений (22.33), получаем изменение входного тока

$$\Delta I^1 = Y^{12} Y^{22-1} \Delta I^2. \quad (22.35)$$

2. Пусть вновь нагрузка меняется, но теперь входное напряжение E_1 изменяется на ΔE_1 , а напряжение на нагрузке E_2 остается постоянным ($\Delta E_2 = 0$). Тогда уравнение (22.33) можно записать в виде

$$\Delta I^1 = Y^{11} \Delta E_1, \quad (22.36)$$

$$\Delta I^2 = Y^{21} \Delta E_1, \quad (22.37)$$

что дает явные выражения для приращений токов (рис. 22.10).

Эту последнюю задачу можно сформулировать в виде вопроса о том, каково должно быть ΔE_1 , чтобы обеспечить постоянст-

во E_2 при заданном ΔI^2 . Поэтому в последнем уравнении будем считать, что ΔE_1 неизвестно, а ΔI^2 известно (рис. 22.11).

Если число входных и выходных зажимов одинаково, то Y^{21} — квадратная и необходимая (для поддержания постоянства напряжений нагрузки (E_2)) изменение приложенного напряжения

$$\Delta E_1 = Y^{21-1} \Delta I^2 \quad (22.38)$$

для данного изменения тока в нагрузке.

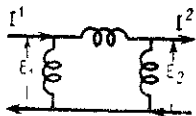


Рис. 22.10. Данная узловая сеть (2 узловые пары).

Дано: $\Delta E_1, \Delta E_2$; найти $\Delta I^1, \Delta I^2$.

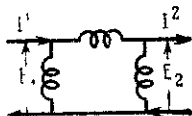


Рис. 22.11. Данная узловая сеть (2 узловые пары).

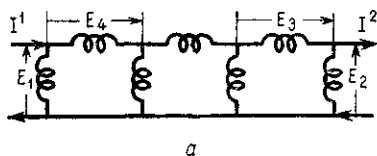
Дано: $\Delta I^2, \Delta E_2$; найти: ΔE_1 .

Если число входных и выходных зажимов разное, следует использовать метод, изложенный в гл. 10, § 16.

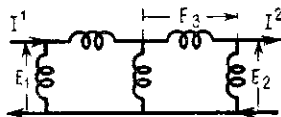
11. ИЗМЕНЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ ОТКРЫТОЙ ЦЕПИ

I. Пусть ток в нагрузке меняется на ΔI^2 , а входное напряжение E_1 остается постоянным. Каково изменение ΔE_3 на части неактивных узловых пар?

Имеется четыре вида узловых пар (рис. 22.12, а). Исключая неактивное E_4 , оставляем три типа узловых пар (рис. 22.12, б),



а



б

Рис. 22.12.

а — данная узловая сеть (4 узловые пары), б — редуцированная сеть (3 узловые пары).
Дано $\Delta I^2, \Delta E_1$, найти ΔE_3

уравнения для которых даны в (22.6). Опуская штрихи, выписываем те же уравнения для изменений:

$$\begin{aligned} \Delta I^1 &= Y^{11} \Delta E_1 - Y^{12} \Delta E_2 - Y^{13} \Delta E_3, \\ \Delta I^2 &= Y^{21} \Delta E_1 - Y^{22} \Delta E_2 - Y^{23} \Delta E_3, \\ 0 &= Y^{31} \Delta E_1 - Y^{32} \Delta E_2 - Y^{33} \Delta E_3. \end{aligned} \quad (22.39)$$

II. В этих уравнениях ΔI^2 дано, а $\Delta E_1 = 0$. Задача состоит в том, чтобы найти ΔE_3 в терминах ΔI^2 .

Приравниваем ΔE_1 нулю:

$$\begin{aligned}\Delta I^1 &= -Y^{12}\Delta E_2 - Y^{13}\Delta E_3, \\ \Delta I^2 &= -Y^{22}\Delta E_2 - Y^{23}\Delta E_3, \\ 0 &= -Y^{32}\Delta E_2 - Y^{33}\Delta E_3.\end{aligned}\tag{22.40}$$

Находим ΔE_2 из второго уравнения

$$\Delta E_2 = -Y^{22-1}(Y^{23}\Delta E_3 + \Delta I^2),$$

подставляем в третье уравнение

$$0 = Y^{32}Y^{22-1}(Y^{23}\Delta E_3 + \Delta I^2) - Y^{33}\Delta E_3.$$

Преобразуем

$$(Y^{33} - Y^{32}Y^{22-1}Y^{23})\Delta E_3 = Y^{32}Y^{22-1}\Delta I^2.$$

Таким образом, изменение напряжения открытой цепи, вызванное изменением тока в нагрузке на величину ΔI^2 , есть

$$\Delta E_3 = (Y^{33} - Y^{32}Y^{22-1}Y^{23})^{-1}Y^{32}Y^{22-1}\Delta I^2.\tag{22.41}$$

12. ОБОБЩЕНИЕ «ТЕОРЕМЫ О КОМПЕНСАЦИИ»

I. В предыдущих параграфах изменялись электрические величины при неизменной электрической сети. (Конечно, нагрузка на сети могла меняться.) *Теперь пусть импедансы z или адмиттансы некоторых или всех катушек тоже изменяются до $z + \Delta z$ или до $Y + \Delta Y$, но без изменения количества или способа соединения катушек.* Например, могут изменяться собственные импедансы некоторых катушек или взаимные индуктивности между катушками и т. д.

Рассматривая уравнение напряжений всей сети до изменения

$$E + e = z(i + I),\tag{22.42}$$

будем считать, что z изменяется до $z + \Delta z$, путь также меняются все электрические величины. После изменения уравнение имеет вид

$$(E + \Delta E) + (e + \Delta e) = (z + \Delta z)[(i + \Delta i) + (I + \Delta I)].\tag{22.43}$$

Вычитаем исходное уравнение (22.42) и получаем

$$\Delta E + \Delta e = (z + \Delta z)(\Delta i + \Delta I) + \Delta z(i + I),\tag{22.44}$$

так что уравнение изменения напряжения есть

$$(\Delta E + \Delta e) - \Delta z(i + I) = (z + \Delta z)(\Delta i + \Delta I).\tag{22.45}$$

Таким образом, если импеданс z сети изменяется на Δz , то это изменение эквивалентно приложению к новой системе на-

пряжения, равного $-\Delta z(i+I)$, где $(i+I)$ — полные токи, текущие в системе до изменения.

Если приложенные напряжения $E+e$ не меняются, то последнее уравнение принимает вид

$$-\Delta z(i+I) = (z + \Delta z)(\Delta i + \Delta I) \quad (22.46)$$

и показывает, что все изменения токов обусловлены этим кажущимся дополнительным приложенным напряжением. В контурной сети без приложенного тока I уравнение (22.45) становится следующим:

$$\Delta e - \Delta zi = (z + \Delta z) \Delta i. \quad (22.47)$$

II. Аналогичные рассуждения применяются к уравнению тока полной сети, в которой так же адмиттансы изменяются на ΔY . Уравнение изменения тока

$$(\Delta i + \Delta I) - \Delta Y(E + e) = (Y + \Delta Y)(\Delta E + \Delta e). \quad (22.48)$$

В узловой сети без приложенного e это уравнение принимает вид

$$\Delta I - \Delta YE = (Y + \Delta Y) \Delta E, \quad (22.49)$$

задавая кажущийся дополнительно приложенный ток в виде $-\Delta YE$.

Уравнения (22.45) и (22.48) являются обобщениями так называемой «теоремы о компенсации», утверждающей, что единичное изменение импеданса Δz эквивалентно приложению напряжения $-\Delta zi$, где i — ток, текущий через z до изменения.

III. Каждое из приведенных выше тензорных уравнений для изменений можно разбить на столько тензорных уравнений, сколько есть видов контуров и узловых пар. Изменение сети Δz или ΔY обычно встречается только в одном типе контуров или узловых пар, значит, только одно из уравнений содержит Δz или ΔY , в то время как остальные содержат только z или Y и, конечно, $\Delta i \Delta E$ и т. д.

Например, в контурной сети с тремя видами контуров, в которой только z_{33} изменяется до $z_{33} + \Delta z_{33}$, уравнение (22.47) принимает вид

$$\begin{aligned} \Delta e_1 &= z_{11} \Delta i^1 + z_{12} \Delta i^2 + z_{13} \Delta i^3, \\ \Delta e_2 &= z_{21} \Delta i^1 + z_{22} \Delta i^2 + z_{23} \Delta i^3, \\ -\Delta z_{33} i^3 + \Delta e_3 &= z_{31} \Delta i^1 + z_{32} \Delta i^2 + (z_{33} + \Delta z_{33}) \Delta i^3. \end{aligned} \quad (22.50)$$

Следует отметить, что величины изменений Δz , Δi и других могут быть любыми: большими или малыми.

13. ИЗМЕНЕНИЕ ИМПЕДАНСА

I. В качестве простого примера рассмотрим двухконтурную компаунд-сеть (рис. 22.13, а), для которой уравнение напряжения

$$e_1 = z_{11}i^1 + z_{12}i^2, \quad (22.51)$$

$$e_2 = z_{21}i^1 + z_{22}i^2.$$



Рис. 22.13.

а — данная контурная сеть (2 контура); б — добавление Δz_{22} . Дано: Δz_{22} ; найти Δi^1 , Δi^2 .

Пусть импеданс z_{22} изменяется на Δz_{22} (рис. 22.13, б), а приложенные напряжения e_1 и e_2 остаются неизменными. Требуется найти приращения токов Δi^1 и Δi^2 .

Уравнение изменения напряжения в контурной сети (22.45) без I и Δe

$$-\Delta z i = (z + \Delta z) \Delta i \quad (22.52)$$

разделяем на два составных уравнения

$$0 = z_{11} \Delta i^1 + z_{12} \Delta i^2, \quad (22.53)$$

$$-\Delta z_{22} i^2 = z_{21} i^1 + (z_{22} + \Delta z_{22}) \Delta i^2.$$

Исключая Δi^1 из первого уравнения

$$\Delta i^1 = -z_{11}^{-1} z_{12} \Delta i^2 \quad (22.54)$$

и подставляя его во второе уравнение

$$-\Delta z_{22} i^2 = -z_{21} z_{11}^{-1} z_{12} \Delta i^2 + (z_{22} + \Delta z_{22}) \Delta i^2,$$

получаем изменение токов в зависимости от изменения импеданса

$$\Delta i^2 = -(z_{22} + \Delta z_{22} - z_{21} z_{11}^{-1} z_{12})^{-1} \Delta z_{22} i^2. \quad (22.55)$$

Подставляя Δi^2 в уравнение (22.45), получаем уравнение изменения остальных токов

$$\Delta i^1 = z_{11}^{-1} z_{12} (z_{22} + \Delta z_{22} - z_{21} z_{11}^{-1} z_{12})^{-1} \Delta z_{22} i^2. \quad (22.56)$$

II. Значение i^2 , необходимое при вычислении Δi^2 , находим из уравнения (22.51)

$$\begin{aligned} i^1 &= z_{11}^{-1} (e_1 - z_{12} i^2), \\ e_2 &= z_{21} z_{11}^{-1} (e_1 - z_{12} i^2) + z_{22} i^2, \\ i^2 &= (z_{22} - z_{21} z_{11}^{-1} z_{12})^{-1} (e_2 - z_{21} z_{11}^{-1} e_1). \end{aligned} \quad (22.57)$$

Если это значение i^2 подставить в уравнение (22.55), то получим Δi^2 , выраженный через приложенные напряжения e_1 и e_2 , и изменение импеданса Δz_{22} в виде

$$\begin{aligned} \Delta i^2 &= -(\Delta z_{22} + z_{22} - z_{21} z_{11}^{-1} z_{12})^{-1} \Delta z_{22} \times \\ &\times (z_{22} - z_{21} z_{11}^{-1} z_{12})^{-1} (e_2 - z_{21} z_{11}^{-1} e_1), \\ \Delta i^2 &= -(\Delta z_{22} + z'_{22})^{-1} \Delta z_{22} z'^{-1}_{22} e'_2. \end{aligned} \quad (22.58)$$

14. НЕИЗМЕННЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ И ТОКИ НАГРУЗКИ

I. Пусть узловая сеть имеет *четыре* типа узловых пар: входные, выходные, нагрузочные, адмиттансы которых Y изменяются на ΔY , остальные неактивные узловые пары (рис. 22.14).

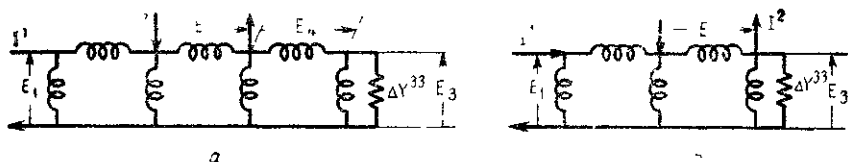


Рис. 22.14:

a — данная узловая сеть (4 узловые пары); *б* — редуцированная сеть (3 узловые пары). Дано. ΔY^{33} , ΔE_2 , ΔI^2 ; найти ΔE_1 .

Если исключить неактивные узловые пары, то уравнения тока *трех* узловых пар имеют вид

$$\begin{aligned} I^1 &= Y^{11} E_1 - Y^{12} E_2 - Y^{13} E_3, \\ I^2 &= Y^{21} E_1 - Y^{22} E_2 - Y^{23} E_3, \\ 0 &= Y^{31} E_1 - Y^{32} E_2 - Y^{33} E_3. \end{aligned} \quad (22.59)$$

В этих уравнениях E_1 и E_2 можно считать известными.

II. Предположим теперь, что 1) Y^{33} изменяется до $Y^{33} + \Delta Y^{33}$; 2) напряжение на входных зажимах E_1 изменяется до $E_1 + \Delta E_1$; 3) напряжение E_2 и ток I^2 в нагрузке не меняются, т. е. $\Delta E_2 = 0$ и $\Delta I^2 = 0$.

Надо найти, каково должно быть изменение ΔE , при котором для данного ΔY^{33} поддерживается $\Delta E_2 = 0$ и $\Delta I^2 = 0$.

III. Уравнение изменения тока

$$\Delta I - \Delta Y E = (Y + \Delta Y) \Delta E \quad (22.60)$$

можно разбить на три составных уравнения:

$$\begin{aligned} \Delta I &= Y^{11} \Delta E_1 - Y^{13} \Delta E_3, \\ 0 &= Y^{21} \Delta E_1 - Y^{23} \Delta E_3, \\ \Delta Y^{33} E_3 &= Y^{31} \Delta E_1 - (Y^{33} + \Delta Y^{33}) \Delta E_3, \end{aligned} \quad (22.61)$$

где ΔE_1 следует определить через E_3 , значение которого известно из уравнения (22.59).

Исключаем ΔE_3 из третьего уравнения

$$\Delta E_3 = (Y^{33} + \Delta Y^{33})^{-1} (Y^{31} \Delta E_1 - \Delta Y^{33} E_3).$$

Подставляем его во второе уравнение

$$\begin{aligned} 0 &= Y^{21} \Delta E_1 - Y^{23} (Y^{33} + \Delta Y^{33})^{-1} (Y^{31} \Delta E_1 - \Delta Y^{33} E_3), \\ 0 &= [Y^{21} - Y^{23} (Y^{33} + \Delta Y^{33})^{-1} Y^{31}] \Delta E_1 + Y^{23} (Y^{33} + \Delta Y^{33})^{-1} \Delta Y^{33} E_3. \end{aligned} \quad (22.62)$$

Таким образом, для данного ΔY^{33} изменение приложенного к входным зажимам напряжения E_1 имеет вид

$$\Delta E_1 = - [Y^{21} - Y^{23} (Y^{33} + \Delta Y^{33})^{-1} Y^{31}]^{-1} Y^{23} (Y^{33} + \Delta Y^{33})^{-1} \Delta Y^{33} E_3, \quad (22.63)$$

где E_3 вычисляется из уравнения (22.59) через известные величины E_1 и E_2 (или I^2).

Хотя матрица тензора Y^{33} квадратная, матрица Y^{21} в общем случае неквадратная; следовательно, матрица тензора в квадратных скобках тоже неквадратная. Они квадратные только в случае равенства числа входных и выходных узловых пар.

Когда матрица Y^{21} неквадратная, уравнение (22.62) представляет в любой системе координат систему обычных линейных уравнений, в которой число неизвестных ΔE_1 не равно числу уравнений. Метод решения таких систем изложен в гл. 10, § 16.

15. ПОТОК МОЩНОСТИ В НАГРУЗКАХ

I. Рассмотрим вновь предыдущую сеть и будем теперь считать, что при изменении адмиттанса Y^{33} на ΔY^{33} входящая в нагрузку мощность $E_2^* I^2$ остается неизменной, хотя E_2 и I^2 меняются (нагрузка может состоять, например, из синхронных двигателей). Задача состоит в том, чтобы найти изменение напряжения на нагрузке, а именно ΔE_2 .

В настоящей задаче вместо E_2 и I^2 постоянным напряжением остается E_1 на входном зажиме, поэтому *уравнение для изменения тока имеет вид*

$$\begin{aligned}\Delta I^1 &= -Y^{12}\Delta E_2 - Y^{13}\Delta E_3, \\ \Delta I^2 &= -Y^{22}\Delta E_2 - Y^{23}\Delta E_3,\end{aligned}\quad (22.64)$$

$$\Delta Y^{33}E_3 = -Y^{32}\Delta E_2 - (Y^{33} + \Delta Y^{33})\Delta E_2.$$

В дополнение к этим уравнениям верно также то, что мощность, входящая в нагрузку до изменения $E_2^* I^2$, та же, что и после изменения $(E_2^* + \Delta E_2^*)(I^2 + \Delta I^2)$. Другими словами, имеет место также уравнение $E_2^* I^2 = (E_2^* + \Delta E_2^*)(I^2 + \Delta I^2)$. Упрощая, получаем четвертое уравнение, представляющее мощность:

$$(E_2^* + \Delta E_2^*)\Delta I^2 = -\Delta E_2^* I^2. \quad (22.65)$$

Два последних уравнения из (22.64) и уравнение мощности (22.65) содержат три неизвестных: ΔE_3 , ΔE_2 и ΔI^2 .

II. Исключаем ΔE_3 из последнего уравнения (22.64)

$$\Delta E_3 = -(Y^{33} + \Delta Y^{33})^{-1}(Y^{32}\Delta E_2 + \Delta Y^{33}E_3).$$

Подставляем его во второе уравнение

$$\begin{aligned}\Delta I^2 &= -Y^{22}\Delta E_2 + Y^{23}(Y^{33} + \Delta Y^{33})^{-1}(Y^{32}\Delta E_2 + \Delta Y^{33}E_3), \\ \Delta I^2 &= -[Y^{22} - Y^{23}(Y^{33} + \Delta Y^{33})^{-1}Y^{32}]\Delta E_2 + \\ &\quad + Y^{23}(Y^{33} + \Delta Y^{33})^{-1}\Delta Y^{33}E_3.\end{aligned}\quad (22.66)$$

Это последнее уравнение и уравнение мощности содержат два неизвестных: ΔE и ΔI .

Подставляем ΔI^2 из последнего уравнения в уравнение (22.65)

$$\begin{aligned}- (E_2^* + \Delta E_2^*) \{ [Y^{22} - Y^{23}(Y^{33} + \Delta Y^{33})^{-1}Y^{32}] \Delta E_2 + \\ + Y^{23}(Y^{33} + \Delta Y^{33})^{-1}\Delta Y^{33}E_3 \} = -\Delta E_2^* I^2\end{aligned}$$

или, приведя подобные члены при ΔE_2 как неизвестном, получаем

$$\begin{aligned}\Delta E_2^* [Y^{22} - Y^{23}(Y^{33} + \Delta Y^{33})^{-1}Y^{32}] \Delta E_2, \\ - \Delta E_2^* [I^2 + Y^{23}(Y^{33} + \Delta Y^{33})^{-1}Y^{33}E_3], \\ + \Delta E_2^* [Y^{22} - Y^{23}(Y^{33} + \Delta Y^{33})^{-1}Y^{32}] \Delta E_2, \\ - E_2^* Y^{23}(Y^{33} + \Delta Y^{33})^{-1}\Delta Y^{33}E_3 = 0.\end{aligned}\quad (22.67)$$

Это инвариантное квадратное уравнение относительно неизвестного вектора ΔE_2 . Метод решения его здесь не рассматрива-

ется. Если есть *только один зажим нагрузки*, то ΔE_2 является скаляром и это уравнение является обычным квадратным уравнением относительно ΔE_2 , оно легко разрешимо.

16. ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ТЕВЕНИНА

I. Пусть дана полная компаунд-сеть с двумя контурами и двумя узловыми парами (рис. 22.15, а).

Задача заключается в следующем: если нагрузка (рис. 22.15, в) присоединяется к разомкнутым узловым парам при на-

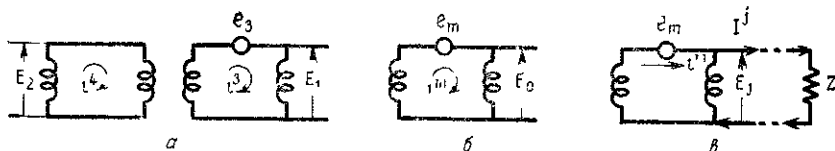


Рис. 22.15.

а — данная ортогональная сеть (2 контура, 2 узловые пары); б — редуцированная сеть (1 контур, 1 узловая пара); в — добавление z . Дано: E_0, z ; найти: I^j .

пряжении на зажиме E_0 , то каким будет ток I в нагрузке в терминах напряжения E_0 , существующего до присоединения нагрузки?

Рассматривая контур с i^4 и узловую пару с E_2 как неактивные, можно упростить сеть так, что она будет иметь один контур и одну узловую пару (рис. 22.15, б).

Уравнение напряжений редуцированной полной сети (рис. 22.15, в) получаем из уравнения (22.8)

$$e_m = z_{mm} i^m - z_{mj} I^j, \quad (22.68)$$

$$E_j = z_{jm} i^m - z_{jj} I^j.$$

Первое инвариантное уравнение выражает столько обычных уравнений, сколько имеется активных контуров, а второе — сколько имеется активных узловых пар.

II. До введения нагрузки (рис. 22.15, в) ток нагрузки I^j равен нулю и уравнение (22.68) принимает вид

$$e_m = z_{mm} i^m, \quad -E_0 = z_{jm} i^m.$$

Решаем первое уравнение относительно i^m (контурный ток)

$$i^m = z_{mm}^{-1} e_m. \quad (22.69)$$

Подставляя во второе уравнение напряжение на зажимах разомкнутой цепи, получаем для E_0 на нагрузке

$$E_0 = z_{jm} z_{mm}^{-1} e_m. \quad (22.70)$$

III. Теперь введем z (рис. 22.15, *в*) (другими словами, пусть импедансы со взаимными индуктансами между ними будут соединены несколькими узловыми парами). Эффект воздействия нагрузки z заключается в установлении напряжения на зажиме E , равном zI . Следовательно, при наличии z уравнение (22.68) становится равным

$$e_m = z_m i^m - z_{mj} I^j, \quad (22.71)$$

$$z I^j = z_{jm} i^m - z_{jj} I^j.$$

Снова разрешая первое уравнение относительно i^m

$$i^m = z_{mm}^{-1} (e_m + z_{mj} I^j) \quad (22.72)$$

и подставляя во второе уравнение

$$z I^j = z_{jm} z_{mm}^{-1} (e_m + z_{mj} I^j) - z_{jj} I^j,$$

получаем ток в нагрузке I^j

$$(z + z_{jj} - z_{jm} z_{mm}^{-1} z_{mj}) I^j = z_{jm} z_{mm}^{-1} e_m.$$

Но из уравнения (10.7)

$$z_{jj} - z_{jm} z_{mm}^{-1} z_{mj} = z'_{jj} \quad (22.73)$$

представляет импеданс короткого замыкания сети, измеренный на нагрузке. Следовательно, $(z + z'_{jj}) I^j = z_{jm} z_{mm}^{-1} e_m$ и ток в нагрузке

$$I^j = (z + z'_{jj})^{-1} z_{jm} z_{mm}^{-1} e_m. \quad (22.74)$$

Но выражение за скобками $z_{jm} z_{mm}^{-1} e_m$ представляет собой по уравнению (22.70) напряжение разомкнутой цепи на нагрузке E_0 , так как напряжение e_m , приложенное в контуре, одно и то же до и после присоединения нагрузки z . Следовательно, ток в нагрузке z

$$I = (z + z'_{jj})^{-1} E_0, \quad (22.75)$$

где z — тензор импеданса нагрузки; z'_{jj} — тензор импеданса короткого замыкания сети, измеренный на зажимах нагрузки; E_0 — напряжение разомкнутой цепи на зажимах нагрузки до присоединения z .

Контурный ток i^m находят из тока нагрузки I^j по уравнению (22.72) или из уравнения

$$i^m = z_{mm}^{-1} [e_m + z_{mj} (z + z'_{jj})^{-1} E_0], \quad (22.76)$$

где первый член $z_{mm}^{-1} e_m$ представляет собой контурные токи до присоединения нагрузки.

IV. Уравнение (22.75) представляет обобщение теоремы Тевенина, которая задает единственный ток нагрузки I , текущий в единственной нагрузке Z , в виде

$$I = (z + z'_{jj})^{-1} E_0, \quad (22.77)$$

где Z'_{jj} — импеданс сети со стороны нагрузки, а E_0 — напряжение на зажиме разомкнутой цепи (рис. 22.16).

Следует отметить, что сети Z'_{jj} и Z могут быть асимметричными и, кроме того, могут содержать приложенные напряжения e_m и токи I^j в исключаемых контурах и узловых парах. Другими словами, сети являются асимметричными, активными сетями с любым количеством контуров и зажимов.

V. Эта теорема может быть также развита в предположении, что существуют два компанд-контура вместо одного контура и одной узловой пары; можно использовать

$$\begin{aligned} e_1 &= z_{11}i^1 + z_{12}i^2, \\ e_2 &= z_{21}i^1 + z_{22}i^2 \end{aligned} \quad (22.78)$$

вместо уравнения (22.68) с заменой e_2 на $-zi^2$ (рис. 22.17). Результаты будут те же. Однако этот метод рассуждений не явля-

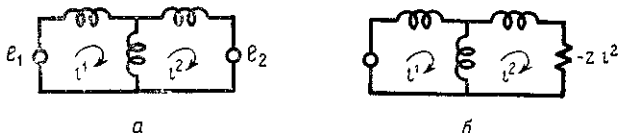


Рис. 22.17.

а — данная контурная сеть (2 контура); б — замена e на $-z \cdot i^2$. Дано: e_2, z ; найти: i^2

ется законченным, так как каждый контур e_2 должен содержать только одно приложенное напряжение.

17. ТОКИ КОРОТКОГО ЗАМЫКАНИЯ

I. Частный случай теоремы Тевенина, когда $z=0$, представляет закорачивание разомкнутых узловых пар (рис. 22.18).

Из уравнения (22.77) ток короткого замыкания

$$I^j = z'_{jj}{}^{-1} E_0, \quad (22.79)$$

где E_0 — разность потенциалов на узловых парах до их закорачивания, а z'_{jj} — импеданс сети при короткозамкнутых зажимах.

Контурные токи в закороченных цепях определяются по уравнению (22.76)

$$i^m = z_{mm}^{-1} (e_m + z_{mj} z'_{jj}{}^{-1} E_0), \quad (22.80)$$

где первый член $z_{mm}^{-1} e_m$ представляет контурные токи, существующие до закорачивания. Следовательно, дополнительные кон-

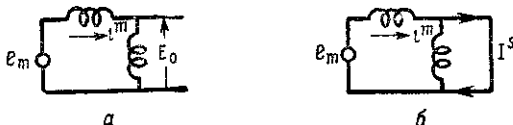


Рис. 22.18.

a — данная ортогональная сеть (1 контур, 1 узловая пара); *б* — короткое замыкание. Дано: E_0 , найти I^s .

турные токи, обусловленные закороченными цепями, равны

$$i^m = z_{mm}^{-1} z_{mj} z'_{jj}{}^{-1} E_0. \quad (22.81)$$

18. ТЕОРЕМА, ДВОЙСТВЕННАЯ ТЕОРЕМЕ ТЕВЕНИНА

I. Любой способ рассуждения, любую теорему можно выразить в двойственной форме, заменив z на Y (см. гл. 14, § 1).

Вместо сети, двойственной по отношению к полной сети, возьмем сеть, двойственную к контурной сети (рис. 22.17), а именно

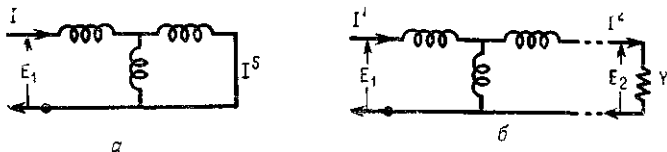


Рис. 22.19.

a — данная короткозамкнутая цепь с током I^s , *б* — включена нагрузка Y . Дано: I^s , Y ; найти: E_2 .

узловую сеть (рис. 22.19), имеющую две узловые пары (после упрощения).

Для нее уравнение тока

$$I^1 = Y^{11} E_1 - Y^{12} E_2, \quad (22.82)$$

$$I^2 = Y^{21} E_1 - Y^{22} E_2.$$

Пусть параллельно с закороченной узловой парой, по которой идет ток короткого замыкания I^s , присоединена нагрузка Y . Надо найти разность потенциалов E_2 на нагрузке в терминах

тока короткого замыкания I^s , существующего до введения нагрузки. Будем считать, что входные токи I^1 остаются теми же как до введения Y , так и после (так же, как e_1 остается постоянной при введении z).

II. До введения Y (рис. 22.19, а) напряжение на нагрузке E_2 равно нулю, и уравнение (22.82) становится следующим:

$$I^1 = Y^{11}E_1, \quad (22.83)$$

$$I^2 = Y^{21}E_1.$$

Решая первое уравнение относительно E_1 и подставляя его во второе, получаем ток короткого замыкания

$$I^s = Y^{21}Y^{11-1}I^1. \quad (22.84)$$

III. Цель введения Y — сделать ток нагрузки I^2 равным YE_2 . Следовательно, в присутствии Y уравнение (22.82) становится равным

$$I^1 = Y^{11}E_1 - Y^{12}E_2, \quad (22.85)$$

$$YE_2 = Y^{21}E_1 - Y^{22}E_2.$$

Решая первое уравнение относительно E_1 , получаем

$$E_1 = Y^{11-1}(I^1 + Y^{12}E_2)$$

и подставляя его во второе уравнение

$$YE_2 = Y^{21}Y^{11-1}(I^1 + Y^{12}E_2) - Y^{22}E_2,$$

получаем для напряжения на нагрузке

$$(Y + Y^{22} - Y^{21}Y^{11-1}Y^{12})E_2 = Y^{21}Y^{11-1}I^1, \quad (22.86)$$

но $Y^{22} - Y^{21}Y^{11-1}Y^{12} = Y^{22'}$ представляет адмиттанс разомкнутой цепи со стороны нагрузки, а правая часть уравнения (22.86) по уравнению (22.84) — ток короткого замыкания I^s , существующий до нагрузки (так как I^1 остается постоянным). Таким образом, напряжение на нагрузке

$$E_2 = (Y + Y^{22'})^{-1}I^s. \quad (22.87)$$

Это уравнение является двойственным уравнению (22.75).

IV. Частный случай, когда $Y=0$, представляет размыкание короткозамкнутой узловой пары. Напряжение разомкнутой цепи

$$E_2 = Y^{22'-1}I^s \quad (22.88)$$

и выражается через ток короткого замыкания, существующего до размыкания цепи.

Глава 23

СИНТЕЗ СЕТЕЙ

1. ТИПЫ РАССМАТРИВАЕМЫХ ЗАДАЧ

I. В задачах, которые рассматривались в предыдущей главе, посвященной анализу сетей, предполагалось, что:

1) конструкционные константы z или Y всех катушек известны;

2) соединение C или C_t^{*-1} катушек между собой также известно.

При синтезе сетей одно из этих условий или оба считают невыполненными. Вместо них выступают некоторые требования к поведению сети.

II. В этой главе рассмотрим три проблемы общего типа.

1. *Даны определенные требуемые характеристики поведения (скажем, сеть должна давать неизменный ток I на зажимах, заданных независимо от величины подсоединенной нагрузки), и задача состоит в нахождении соотношения, которое должно существовать между импедансами или адмиттансами контуров или узлов сети, чтобы сеть работала требуемым образом. Эти соотношения между компонентами z' или Y (а также e и i) будем называть «критериями поведения». Каждый тип поведения имеет свой «критерий». В дальнейшем будет установлено несколько таких критериев для множества типов поведения.*

2. Когда дана сеть, в которой контурные импедансы z' (или Y') известны и удовлетворяют требуемому «критерию поведения», то следующая проблема состоит в автоматическом нахождении импедансов (приложенных напряжений) среди множества других произвольных сетей, имеющих другие соединения и импедансы катушек, которые ведут себя так же. Тензор импеданса (или адмиттанса) z' или Y' (а также e' и I') этих сетей находят с помощью тензора преобразования нового типа — так называемого «тензора синтеза» C'_s . Для каждого критерия поведения следует получить свой «тензор синтеза», который оставляет критерий (или множество критериев) инвариантным.

3. Если «тензор синтеза» C'_s , меняющий z'_1 на z'_2 (без выхода из области согласия с критерием), известен, то следующая задача заключается в определении «примитивного тензора син-

теза» C_{σ} , меняющего z_1 (или Y^1) отдельных катушек одной сети на z_2 (или Y^2) отдельных катушек любой другой сети без определения z'_1 и z'_2 результирующих сетей.

Это значит, что C'_i устраняет необходимость установления «критерия поведения» каждой сети и C_{σ} устраняет даже необходимость получения тензора импеданса z' (или Y') каждой сети. Следовательно, в задачах синтеза для рассмотрения существенны: 1) собственные и взаимные импедансы изолированных катушек; 2) тензор соединения рассматриваемой сети.

Тензоры синтеза C'_i и C_{σ} представляют новый тип «групп преобразования», которые устанавливают соответствие между сетями, имеющими вообще различное число катушек.

III. Рассмотрим подробно следующие примеры и найдем в каждом случае «критерий поведения» и «тензор синтеза».

1. Как, сохраняя постоянным напряжение на входных зажимах и изменяя внешнюю нагрузку Y , поддерживать в сети ток нагрузки I^2 постоянным; входной ток I^1 постоянным; оба тока I^1 и I^2 постоянными; напряжение на нагрузке E_2 постоянным; разность потенциалов E_3 на множестве пассивных зажимов постоянной?

2. Как поддерживать входной импеданс z_i или адмиттанс Y^i постоянным в некоторой сети, если сеть пассивная; сеть активная с напряжениями (или токами), приложенными к некоторым или всем замкнутым (или открытым) контурам; сеть питает постоянную нагрузку?

Конечно, количество примеров, встречающихся в инженерной практике, не ограничено.

В случаях, исключаящих недоразумения, штрих, отмечающий действительную физическую сеть, не указывается.

2. ОБЩНОСТЬ МЕТОДА

I. Рассматривая каждую сеть как полную, имеющую несингулярную S , можно определить новую сеть, имеющую требуемые характеристики поведения, без установления тензора импеданса z (или Y) каких-либо сетей, критерия поведения любых сетей.

Таким образом, можно получить большое количество новых сетей, рассматривая только: 1) собственные или взаимные импедансы (или адмиттансы) их отдельных катушек (даже без установления импедансов контуров); 2) тензор преобразования сетей, который показывает их соединение S и тензор их синтеза C_{σ} .

Это значит, что в указанных задачах синтеза нет необходимости находить тензор импеданса z всей сети или даже какой-либо ее части.

II. Во всех задачах синтеза будем предполагать, что синтезируемые сети являются активными асимметричными сетями; следовательно, они могут содержать вакуумные лампы, электрические машины, вращающиеся или колеблющиеся около постоянной скорости, и другие линейные электрические и механические сети.

III. В задачах синтеза часто возникает вопрос: является ли катушка с необходимым значением импеданса или адмиттанса физически реализуемой? Или если она физически реализуема, то является ли она наиболее практичной? Эти вопросы в данной главе подробно не обсуждаются.

Поскольку особенностью подхода, описываемого в этой главе, является то, что определяемые окончательные собственные и взаимные импедансы могут, если требуется, относиться к отдельным катушкам, а также поскольку импедансы отдельных катушек всегда могут быть пересчитаны по известным импедансам, комплексным коэффициентам *линейных операторов*, то выяснение физической реализуемости сетей можно осуществить, рассматривая только изолированные катушки, которые являются функциями произвольных параметров. Нет необходимости усложнять анализ рассмотрением еще и способа соединения катушек и ограничиваться лишь вещественными параметрами.

IV. Подчеркивается, что демонстрируемый подход не является наиболее общим даже для рассматриваемых случаев. Он представляет лишь одну из многих возможностей.

3. КРИТЕРИЙ ПОСТОЯНСТВА ТОКОВ В НАГРУЗКЕ

I. Пусть дана сеть с любым числом контуров и узловых пар, с несколькими генераторами с постоянным напряжением E .

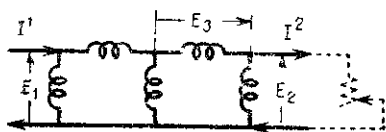


Рис. 23.1. При постоянном E_1 поддерживать постоянным I_2 .

Пусть сеть дает ток I^2 в несколько внешних нагрузок (скажем, в трехфазную нагрузку), адмиттансы Y которых не показаны на диаграмме сети. Задача такова: определить, какие соотношения должны быть между адмиттансами сети, чтобы ток I оставался неизменным независимо от того, как меняются адмиттансы нагрузки Y .

II. Независимо от того, как устроена сеть, предположим, что она рассматривается как узловая сеть и ее узловые пары разделены на три функционально различные группы (рис. 23.1): 1) содержащую все те узловые пары, которые имеют постоянные приложенные к ним напряжения E_1 ; 2) содержащую узловые пары, которые выходят на нагрузку и через которые протекает I^2 , на них же возникает E_2 ; 3) в которой находятся пассивные узловые пары с возникающей на них разностью потенциалов E_3 .

Следовательно, если эту сеть рассматривать как узловую с тремя узловыми парами, то уравнения тока будут

$$\begin{aligned} I^1 &= Y^{11}E_1 - Y^{12}E_2 - Y^{13}E_3, \\ I^2 &= Y^{21}E_1 - Y^{22}E_2 - Y^{23}E_3, \\ 0 &= Y^{31}E_1 - Y^{32}E_2 - Y^{33}E_3. \end{aligned} \quad (23.1)$$

В этих уравнениях E_1 — константа, а I^2 необходимо поддерживать постоянным.

III. Исключаем пассивное E_3 из третьего уравнения

$$E_3 = Y^{33-1}(Y^{31}E_1 - Y^{32}E_2).$$

Подставляя его в два других уравнения, имеем

$$\begin{aligned} I^1 &= (Y^{11} - Y^{13}Y^{33-1}Y^{31})E_1 - (Y^{12} - Y^{13}Y^{33-1}Y^{32})E_2, \\ I^2 &= (Y^{21} - Y^{23}Y^{33-1}Y^{31})E_1 - (Y^{22} - Y^{23}Y^{33-1}Y^{32})E_2. \end{aligned} \quad (23.2)$$

Ток нагрузки I^2 — функция генерируемого напряжения E_1 , которое всегда постоянно, и E_2 — напряжение, возникающее на нагрузке, значение которого зависит от нагрузки.

IV. Теперь для того чтобы I^2 был функцией постоянного E_1 и не зависел от переменного E_2 , необходимо и достаточно, чтобы коэффициент при E_2 во втором уравнении равнялся нулю. Следовательно, если адмиттансы катушек удовлетворяют «критерию постоянства тока в нагрузке» (в котором все «адмиттансы размыкания», такие как в уравнении (23.2), будут отличаться двумя штрихами вместо одного)

$$Y^{22''} = Y^{22} - Y^{23}Y^{33-1}Y^{32} = 0, \quad (23.3)$$

то постоянные токи в нагрузке

$$I^2 = (Y^{21} - Y^{23}Y^{33-1}Y^{31})E_1. \quad (23.4)$$

Так как компоненты E_1 — константы, то компоненты I^2 — также константы независимо от того, каковы нагрузки. (Если компоненты E_1 изменяются, то компоненты I^2 следуют за этими изменениями пропорционально множителю $Y^{22''}$.) Таким образом, если адмиттанс $Y^{22''}$, рассматриваемый со стороны нагрузки, равен нулю, то в любой сети токи нагрузки постоянны. Адмиттанс может удовлетворять этому условию на одной частоте либо на всех частотах, либо в некоторой полосе частот в зависимости от других условий, которые должны быть установлены.

V. Левая часть уравнения (23.3) является матрицей в каждой частной задаче. Матрица является нулевой, если каждая ее компонента равна нулю. Следовательно, приравнявая нулю компоненты матрицы в уравнении (23.3), получаем, что критерий поведения выражается системой k^2 соотношений между конст-

рукционными константами сети, которые должны быть выполнены (где k — число токов и их надо поддерживать постоянными).

Следует заметить, что, если сеть рассматривается как полная, а не узловая, ее тензор адмиттанса содержит 16 компонент Y вместо 9, остальные семь Y представляют контуры, которыми мы пренебрегали. Этим дополнительным Y можно придавать любые значения, так как они не фигурируют в критерии. Следовательно, из 16 компонент-тензоров сети 15 имеют произвольные значения, тогда как один из них (Y^{22}) должен быть равен $Y^{23}Y^{33}-1Y^{32}$. Конечно, для того чтобы удовлетворять этому последнему требованию, используя физически реализуемые катушки, три других тензора — Y^{23} , Y^{32} , Y^{33} — не могут иметь произвольные значения.

VI. Если вместо постоянства тока нагрузки I^2 стабилизирует ток генератора I^1 , то коэффициент при E_2 в первом уравнении (23.2) приравнивается нулю. Значит, если

$$Y^{12} = Y^{12} - Y^{13}Y^{33} - 1Y^{32} = 0, \quad (23.5)$$

т. е. получаем «критерий постоянства тока генератора» и ток генератора

$$I^1 = (Y^{11} - Y^{13}Y^{33} - 1Y^{31}) E_1.$$

VII. Если уравнения (23.3) и (23.5) удовлетворяются вместе, то при всех нагрузках I^1 и I^2 будут постоянными.

VIII. Если необходимо поддерживать постоянными лишь часть токов нагрузки или токов генератора, то тензорное уравнение тока сети $I = YE$ разбивается более чем на три тензорных уравнения, дальнейшие действия с которыми аналогичны.

IX. Снова надо обратить внимание на то, что все рассмотренные уравнения (и их следствия) применимы к любым асимметричным сетям, которые можно разбить на указанное число групп узловых пар или контуров. Каждая группа может содержать любое число узловых пар или контуров — от 1 до ∞ .

4. КРИТЕРИЙ ПОСТОЯНСТВА РАЗНОСТИ ПОТЕНЦИАЛОВ

I. Пусть необходимо поддерживать постоянными разности потенциалов E_3 на некоторых пассивных узловых парах сети, тогда как E_4 остальных пассивных узловых пар и E_2 нагрузочных узловых пар меняются вместе с нагрузкой (рис. 23.2). Приложенное напряжение E_1 также постоянно.

Разбивая узловые пары на четыре группы, составляем уравнения токов

$$\begin{aligned} I^1 &= Y^{11}E_1 - Y^{12}E_2 - Y^{13}E_3 - Y^{14}E_4, \\ I^2 &= Y^{21}E_1 - Y^{22}E_2 - Y^{23}E_3 - Y^{24}E_4, \\ 0 &= Y^{31}E_1 - Y^{32}E_2 - Y^{33}E_3 - Y^{34}E_4, \\ 0 &= Y^{41}E_1 - Y^{42}E_2 - Y^{43}E_3 - Y^{44}E_4. \end{aligned} \quad (23.6)$$

II. Исключаем E_4 из последнего уравнения

$$E_4 = Y^{44-1}(Y^{41}E_1 - Y^{42}E_2 - Y^{43}E_3).$$

Подставляем в третье уравнение

$$0 = (Y^{31} - Y^{34}Y^{44-1}Y^{41})E_1 - (Y^{32} - Y^{34}Y^{44-1}Y^{42})E_2 - \\ - (Y^{33} - Y^{34}Y^{44-1}Y^{43})E_3.$$

Напряжение E_3 будет постоянным, если коэффициент при E_2 равен нулю. Это и есть «критерий постоянного напряжения»

$$Y^{32*} = Y^{32} - Y^{34}Y^{44-1}Y^{42} = 0. \quad (23.7)$$

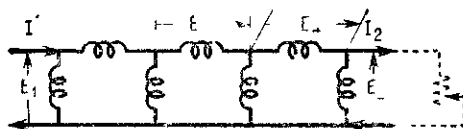


Рис. 23.2. При постоянном E_2 поддерживать постоянным E_3 .

Постоянные напряжения на зажимах равны

$$E_3 = (Y^{33} - Y^{34}Y^{44-1}Y^{43})^{-1}(Y^{31} - Y^{34}Y^{44-1}Y^{41})E_1 = Y^{33* -1}Y^{31*}E_1. \quad (23.8)$$

5. КРИТЕРИЙ ПОСТОЯНСТВА НАПРЯЖЕНИЙ НА НАГРУЗКЕ

I. Пусть теперь необходимо выдерживать постоянными разности потенциалов E_2 на некоторых *переменных нагрузках* при постоянстве некоторых других нагрузок. Это значит, что сеть

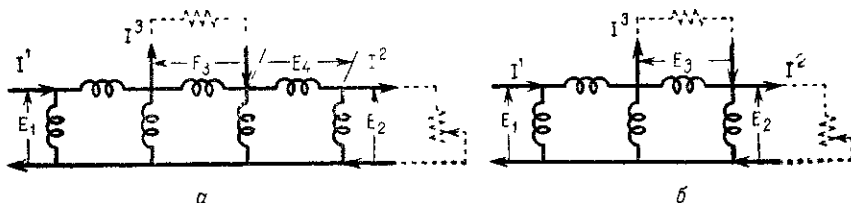


Рис. 23.3. При постоянном E_1 поддерживать постоянным E_2 .

разделяется на четыре типа узловых пар (рис. 23.3): 1) с постоянным входным напряжением (E_1); 2) с постоянным напряжением на переменной нагрузке (E_2); 3) с переменным напряжением на постоянной нагрузке (E_3); 4) пассивные узловые пары (E_4).

II. Исключаем пассивные узловые пары (с помощью формул редукции) и получаем уравнения для активных узловых пар

$$\begin{aligned} I^1 &= Y^{11''} E_1 - Y^{12''} E_2 - Y^{13''} E_3, \\ I^2 &= Y^{21''} E_1 - Y^{22''} E_2 - Y^{23''} E_3, \\ I^3 &= Y^{31''} E_1 - Y^{32''} E_2 - Y^{33''} E_3. \end{aligned} \quad (23.9)$$

Пусть величина постоянных нагрузок Y , так что $I^3 = Y E_3$.

Подставляем это в третью уравнение $(Y + Y^{33''}) E_3 = Y^{31''} E_1 - Y^{32''} E_2$.

III. Потенциалы E_2 на переменных нагрузках постоянны, если коэффициент при E_3 равен нулю — это есть «критерий постоянного напряжения на нагрузке»:

$$Y + Y^{33''} = 0. \quad (23.10)$$

Постоянный потенциал на нагрузке равен

$$E_2 = Y^{32''-1} Y^{31''} E_1. \quad (23.11)$$

Для существования матрицы, обратной $Y^{32''}$, необходимо, чтобы число зажимов постоянной нагрузки выбиралось равным числу зажимов переменной нагрузки. Любую катушку сети можно рассматривать как постоянную нагрузку Y , считая два узла катушки за узловую пару.

IV. Интересно, что для поддержания постоянных токов I^2 в нагрузке адмиттансы сети следует рассчитывать с учетом только переменных нагрузок. Однако для поддержания постоянными нагрузочных напряжений E_2 адмиттансы сети нужно рассчитывать с учетом как переменных нагрузок, так и равного числа других зажимов.

6. КРИТЕРИЙ ПОСТОЯНСТВА ВХОДНОГО ИМПЕДАНСА

I. Пусть дана сеть (рис. 23.4), в которой известны входные импедансы z_i некоторых ветвей. Сеть может иметь, например, некоторую требуемую характеристику зависимости импеданса от входной частоты. Необходимо теперь сконструировать другие сети, имеющие тот же самый входной импеданс z_i во всем диапазоне частот.

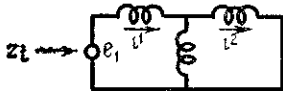


Рис. 23.4. Поддерживать постоянным входной импеданс z_i .

Контуры сети могут быть двух типов: 1) входные с приложенным напряжением ϵ ; 2) пассивные. Наличием узловых пар (третьей группой открытых контуров) пренебрегаем.

II. Первый шаг состоит в том, чтобы найти «критерий поведения», т. е. соотношение, которое должно существовать между

импедансами сети (z_1 должен иметь исходное значение). Уравнение напряжения

$$e_1 = z_{11}i^1 = z_{12}i^2, \quad (23.12)$$

$$0 = z_{21}i^1 + z_{22}i^2.$$

Для нахождения входного импеданса исключаем i^2 из второго уравнения $i^2 = -z_{22}^{-1}z_{21}i^1$. Подставляем его в первое уравнение

$$e_1 = (z_{11} - z_{12}z_{22}^{-1}z_{21})i^1.$$

Выражение в скобках — входной импеданс сети, и он должен быть равен данному значению z_i . Следовательно, «критерий постоянства входного импеданса»

$$z_i = z_{11} - z_{12}z_{22}^{-1}z_{21}. \quad (23.13)$$

7. КРИТЕРИЙ РАВЕНСТВА ВХОДНОГО ИМПЕДАНСА АКТИВНЫХ СЕТЕЙ

I. Предположим, что сеть имеет требуемые входные характеристики, когда к бывшим пассивным контурам приложены напряжения e_2 (рис. 23.5). В этом случае данная сеть имеет определенное эквивалентное входное напряжение e , которое должно быть таким же во всех других сетях. Следовательно, нужно иметь *дополнительный* критерий, который должен выполняться во всех эквивалентных сетях.



Рис. 23.5. В активной сети поддерживать постоянным z_i .

Уравнение сети

$$e_1 = z_{11}i^1 + z_{12}i^2, \quad (23.14)$$

$$e_2 = z_{21}i^1 + z_{22}i^2.$$

II. Исключаем i^2 из второго уравнения и подставляем его значение в первое уравнение

$$e_1 = z_{11}i^1 + z_{12}z_{22}^{-1}(e_2 - z_{21}i^1), \quad (23.15)$$

$$(e_1 - z_{12}z_{22}^{-1}e_2) = (z_{11} - z_{12}z_{22}^{-1}z_{21})i^1.$$

(Это такое же уравнение, что и (10.17).)

Левая часть его представляет эквивалентное входное напряжение сети, которое должно сохраняться во всех сетях. Следо-

вательно, дополнительный «критерий постоянства входного напряжения»

$$e_i = e_1 - z_{12}z_{22}^{-1}e_2. \quad (23.16)$$

III. Если только часть из ранее пассивных контуров содержит приложенные напряжения (рис. 23.6), то предполагаются три группы контуров:

$$\begin{aligned} e_1 &= z_{11}i^1 + z_{12}i^2 + z_{13}i^3, \\ e_2 &= z_{21}i^1 + z_{22}i^2 + z_{23}i^3, \\ 0 &= z_{31}i^1 + z_{32}i^2 + z_{33}i^3. \end{aligned} \quad (23.17)$$



Рис. 23.6. В активной сети поддерживать постоянным z_i .

Исключаем i^3 и i^2 по уравнениям (10.33) и (10.34), получаем два критерия

$$z_i = z_{11}'' - z_{12}''z_{22}''^{-1}z_{21}'', \quad (23.18)$$

$$e_i = e_1 - z_{12}''z_{22}''^{-1}e_2, \quad (23.19)$$

где величины со штрихами — импедансы короткого замыкания.

8. КРИТЕРИЙ РАВЕНСТВА ВХОДНОГО ИЛИ ВЫХОДНОГО АДМИТТАНСА

I. Пусть дана сеть (рис. 23.7), в которой входной адмиттанс Y^i и выходной Y^o известны. Задача состоит в конструировании другой сети с теми же входным и выходным адмиттансами.

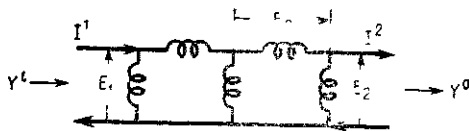


Рис. 23.7. Поддерживать постоянными Y^i и Y^o .

Узловые пары сети делим на три группы: входные, выходные и пассивные. Наличием контуров (дополнительной группой замкнутых узловых пар) пренебрегаем.

II. Первый шаг состоит в установлении соотношения, которое должно существовать между адмиттансами сети, чтобы Y^i и Y^o были постоянными. Таким образом, первым шагом является нахождение «критерия поведения».

Уравнения токов сети

$$\begin{aligned} I^1 &= Y^{11}E_1 - Y^{12}E_2 - Y^{13}E_3, \\ I^2 &= Y^{21}E_1 - Y^{22}E_2 - Y^{23}E_3, \\ 0 &= Y^{31}E_1 - Y^{32}E_2 - Y^{33}E_3. \end{aligned} \quad (23.20)$$

Так как Y^0 постоянный, то $I^2 = Y^0 E_2$. Находим входной импеданс сети, исключая E_3 из третьего уравнения и подставляя его в два других; получаем (23.2) уже как

$$I^1 = (Y^{11} - Y^{13}Y^{33-1}Y^{31})E_1 - (Y^{12} - Y^{13}Y^{33-1}Y^{32})E_2, \quad (23.21)$$

$$Y^0 E_2 = (Y^{21} - Y^{23}Y^{33-1}Y^{31})E_1 - (Y^{22} - Y^{23}Y^{33-1}Y^{32})E_2.$$

Эти уравнения можно записать так:

$$I^1 = Y^{11*}E_1 - Y^{12*}E_2, \quad (23.22)$$

$$Y^0 E_2 = Y^{21*}E_1 - Y^{22*}E_2.$$

Исключим E_2 из второго уравнения: $E_2 = (Y^0 + Y^{22*})^{-1} Y^{21*} E_1$, подставим его в первое уравнение:

$$I^1 = [Y^{11*} - Y^{12*} (Y^0 + Y^{22*})^{-1} Y^{21*}] E_1. \quad (23.23)$$

Выражение в квадратных скобках — входной адмиттанс сети, который должен быть равен заданному Y^i . Следовательно, «критерий постоянства адмиттанса» есть

$$Y^i = Y^{11*} - Y^{12*} (Y^0 + Y^{22*})^{-1} Y^{21*}. \quad (23.24)$$

9. ОПРЕДЕЛЕНИЕ «ТЕНЗОРА СИНТЕЗА» C_s .

I. Предположим, что для данной сети (имеющей несингулярный C_1) собственные и взаимные импедансы или адмиттансы отдельных катушек уже выбраны так, что сеть удовлетворяет требуемому «критерию поведения» и, следовательно, работает так, как требуется. Предположим также, что тензор импеданса z_1 (или Y^1) сети также известен.

Представим теперь некоторую другую произвольную сеть C_2 , имеющую другое число катушек, соединенных произвольно. Задача состоит в нахождении z_2 (или Y^2) второй сети из z_1 (или Y^1) таким преобразованием, чтобы вторая сеть при этом работала точно так же, как первая сеть. Таким образом, z_2 (или Y^2) второй сети нужно найти, минуя метод проб и ошибок, и установленное z_2 должно удовлетворять «критерию поведения».

II. Тензор преобразования, который переводит z_1 данной сети в z_2 некоторой другой сети и автоматически учитывает «критерий поведения», будем называть «тензором синтеза» C_s^* . Вместо сохранения скаляра e^*i инвариантом C_s^* оставляет инвариантом некоторые другие комбинации тензоров, а именно «критерий поведения».

Тензоры преобразований, применявшиеся до сих пор, выполняли несколько видов подсобной работы: соединяли катушки, меняли число витков, вводили гипотетические токи, выполняя это за один шаг. *Тензор преобразования C_{σ} , вводимый теперь, будет выполнять другую работу: менять импедансы отдельных катушек, выполняя, впрочем, и другие функции, преимущественно соединения катушек.*

Так как в нескольких следующих параграфах примитивные сети не рассматриваются, штрихи будем опускать.

10. УСТАНОВЛЕНИЕ ТЕНЗОРА СИНТЕЗА

I. Тензор синтеза C_{σ} или $C_{\sigma t}^{*-1} = A_{\sigma}$ будет установлен отдельно для каждого «критерия поведения» как компаунд-тензор следующими шагами. Эти шаги определяются требованием, чтобы «критерий поведения» имел одну и ту же форму как до преобразования посредством C_{σ} , так и после него. (Вместо преобразования самого критерия найдена более быстрая процедура, заключающаяся в предварительном преобразовании z и в последующем восстановлении формы преобразованного критерия.)

1. Составляем тензор импеданса z_1 (или Y^1) первой сети как компаунд-тензор, содержащий столько строк и столбцов, сколько типов контуров и узловых пар.

2. Получаем несингулярный компаунд-тензор преобразования C_{σ} (или $C_{\sigma t}^{*-1}$), каждая компонента которого — пока не определенный 2-тензор.

3. Определяем тензор импеданса z_2 (или Y^2) новой сети, как произведение $C_{\sigma t}^* z_1 C_{\sigma}$ (или $C_{\sigma}^{-1} Y^1 C_{\sigma t}^{*-1}$).

4. Составляем выражение «критерия поведения», пользуясь компонентами нового тензора импеданса z_2 .

Этот критерий содержит те же импедансы, что и исходный критерий; кроме того, он содержит все тензоры — компоненты компаунд-тензора синтеза C_{σ} .

5. *Некоторые (но не все) тензорные блоки тензора C_{σ} приравняются нулю или единичным тензорам I (или изменяются некоторым другим образом), так что все компоненты C_{σ} выпадают из выражения «критерия поведения».*

II. Таким образом обнаруживается, что если тензор синтеза C_{σ} принимает простейшую форму после приравнивания его компонент нулю или единице, оставляя другие компоненты совершенно произвольными, то последующее умножение z_1 сети на эту специальную форму оставляет «критерий поведения» без изменения, так как все компоненты C_{σ} выпадают из рассмотрения. Следовательно, *импедансы катушек, взаимосоединения между катушками и число катушек — все может изменяться под действием C_{σ} , при этом критерий поведения не изменяется. Новая сеть будет работать точно так же, как исходная сеть.*

Так как некоторые компоненты C_{σ} содержат произвольные величины (действительные или комплексные числа или линейные операторы), то *существует большое число сетей, каждая с большим разнообразием импедансов катушек, которые имеют одинаковые характеристики поведения*. Выделение частной сети с конкретными импедансами катушек определяется физически и экономическими соображениями.

11. ТЕНЗОР СИНТЕЗА ДЛЯ «ПОСТОЯННОГО ВЫХОДНОГО ТОКА»

I. Тензор адмиттанса узловой сети, выходной ток которой выдерживается постоянным, из уравнения (23.1) есть

$$Y = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & 1 & 2 & 3 \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{array}{|c|c|c|} \hline Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} \\ \hline Y_{21} & Y_{22} & Y_{23} \\ \hline Y_{31} & Y_{32} & Y_{33} \\ \hline \end{array} & \end{array} \end{array} \quad (23.25)$$

Подчеркивается, что Y полной ортогональной сети содержит одну дополнительную строку и столбец, соответствующие отбрасываемым контурам.

«Критерий поведения», оставляемый инвариантным, согласно уравнению (23.3)

$$Y^{22} - Y^{23}Y^{33-1}Y^{32} = 0. \quad (23.26)$$

Следует заметить, что в критерии не встречаются компоненты *первой* строки и столбца Y (входные оси) и компоненты *четвертой* строки и столбца Y , представляющие отбрасываемые контуры и не показанные в уравнении (23.1).

II. *Задача состоит в установлении тензора преобразования A_{σ}* («сопряженный транспонированный обратный тензор преобразования» $C_{\sigma t}^{*-1}$, обозначенный через A_{σ}), изменяющего Y данной сети в Y' некоторой другой сети так

$$Y' = A_{\sigma t}^* Y A_{\sigma} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & 1' & 2' & 3' \\ \begin{array}{c} 1' \\ 2' \\ 3' \end{array} & \begin{array}{|c|c|c|} \hline Y^{11'} & Y^{12'} & Y^{13'} \\ \hline Y^{21'} & Y^{22'} & Y^{23'} \\ \hline Y^{31'} & Y^{32'} & Y^{33'} \\ \hline \end{array} & \end{array}, \end{array} \quad (23.27)$$

что критерий поведения остается неизменным, инвариантным. Таким образом, после преобразования

$$Y'^{22'} - Y'^{23'} Y'^{33'-1} Y'^{32'} = Y^{22} - Y^{23} Y^{33-1} Y^{32}, \quad (23.28)$$

причем компоненты A_{σ} выпали. Если это условие удовлетворено, то даже *после* преобразования

$$Y^{22'} - Y^{23'} Y^{33'} - Y^{32'} = 0 \quad (23.29)$$

и выходные токи новой сети являются постоянными. Тензор синтеза имеет вид

$$A_{\sigma} = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1' & 2' & 3' \\ \hline A_1^1 & A_1^2 & A_1^3 \\ \hline A_2^1 & A_2^2 & A_2^3 \\ \hline A_3^1 & A_3^2 & A_3^3 \\ \hline \end{array}, \quad A_{\sigma t}^* = \begin{array}{c} 1' \\ 2' \\ 3' \end{array} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline A_{1t}^{1*} & A_{2t}^{1*} & A_{3t}^{1*} \\ \hline A_{1t}^{2*} & A_{2t}^{2*} & A_{3t}^{2*} \\ \hline A_{1t}^{3*} & A_{2t}^{3*} & A_{3t}^{3*} \\ \hline \end{array}, \quad (23.30)$$

где все компоненты пока полагаем произвольными.

III. После преобразования Y по формуле $A_{\sigma t}^* Y A_{\sigma}$ новое значение Y'' по (23.27) имеет вид $Y'' =$

| | | |
|---|---|---|
| $\begin{aligned} & A_{1t}^{1*} (Y^{11} A_1^1 + \\ & + Y^{12} A_2^1 + Y^{13} A_3^1) \\ & + A_{2t}^{1*} (Y^{21} A_1^1 + \\ & + Y^{22} A_2^1 + Y^{23} A_3^1) \\ & + A_{3t}^{1*} (Y^{31} A_1^1 + \\ & + Y^{32} A_2^1 + Y^{33} A_3^1) \end{aligned}$ | $\begin{aligned} & A_{1t}^{1*} (Y^{11} A_1^2 + \\ & + Y^{12} A_2^2 + Y^{13} A_3^2) \\ & + A_{2t}^{1*} (Y^{21} A_1^2 + \\ & + Y^{22} A_2^2 + Y^{23} A_3^2) \\ & + A_{3t}^{1*} (Y^{31} A_1^2 + \\ & + Y^{32} A_2^2 + Y^{33} A_3^2) \end{aligned}$ | $\begin{aligned} & A_{1t}^{1*} (Y^{11} A_1^3 + \\ & + Y^{12} A_2^3 + Y^{13} A_3^3) + \\ & + A_{2t}^{1*} (Y^{21} A_1^3 + \\ & + Y^{22} A_2^3 + Y^{23} A_3^3) + \\ & + A_{3t}^{1*} (Y^{31} A_1^3 + \\ & + Y^{32} A_2^3 + Y^{33} A_3^3) \end{aligned}$ |
| $\begin{aligned} & A_{1t}^{2*} (Y^{11} A_1^1 + \\ & + Y^{12} A_2^1 + Y^{13} A_3^1) \\ & + A_{2t}^{2*} (Y^{21} A_1^1 + \\ & + Y^{22} A_2^1 + Y^{23} A_3^1) \\ & + A_{3t}^{2*} (Y^{31} A_1^1 + \\ & + Y^{32} A_2^1 + Y^{33} A_3^1) \end{aligned}$ | $\begin{aligned} & A_{1t}^{2*} (Y^{11} A_1^2 + \\ & + Y^{12} A_2^2 + Y^{13} A_3^2) \\ & + A_{2t}^{2*} (Y^{21} A_1^2 + \\ & + Y^{22} A_2^2 + Y^{23} A_3^2) \\ & + A_{3t}^{2*} (Y^{31} A_1^2 + \\ & + Y^{32} A_2^2 + Y^{33} A_3^2) \end{aligned}$ | $\begin{aligned} & A_{1t}^{2*} (Y^{11} A_1^3 + \\ & + Y^{12} A_2^3 + Y^{13} A_3^3) \\ & + A_{2t}^{2*} (Y^{21} A_1^3 + \\ & + Y^{22} A_2^3 + Y^{23} A_3^3) \\ & + A_{3t}^{2*} (Y^{31} A_1^3 + \\ & + Y^{32} A_2^3 + Y^{33} A_3^3) \end{aligned}$ |
| $\begin{aligned} & A_{1t}^{3*} (Y^{11} A_1^1 + \\ & + Y^{12} A_2^1 + Y^{13} A_3^1) \\ & + A_{2t}^{3*} (Y^{21} A_1^1 + \\ & + Y^{22} A_2^1 + Y^{23} A_3^1) \\ & + A_{3t}^{3*} (Y^{31} A_1^1 + \\ & + Y^{32} A_2^1 + Y^{33} A_3^1) \end{aligned}$ | $\begin{aligned} & A_{1t}^{3*} (Y^{11} A_1^2 + \\ & + Y^{12} A_2^2 + Y^{13} A_3^2) \\ & + A_{2t}^{3*} (Y^{21} A_1^2 + \\ & + Y^{22} A_2^2 + Y^{23} A_3^2) \\ & + A_{3t}^{3*} (Y^{31} A_1^2 + \\ & + Y^{32} A_2^2 + Y^{33} A_3^2) \end{aligned}$ | $\begin{aligned} & A_{1t}^{3*} (Y^{11} A_1^3 + \\ & + Y^{12} A_2^3 + Y^{13} A_3^3) \\ & + A_{2t}^{3*} (Y^{21} A_1^3 + \\ & + Y^{22} A_2^3 + Y^{23} A_3^3) \\ & + A_{3t}^{3*} (Y^{31} A_1^3 + \\ & + Y^{32} A_2^3 + Y^{33} A_3^3) \end{aligned}$ |

(23.31)

IV. Для получения критерия необходимо обратить нижний правый 2-тензор Y^{33} , содержащий девять различных Y . Поскольку в критерии (уравнение (23.26)) фигурирует лишь обратный Y^{33} , то все члены в правом нижнем тензоре Y^{33} , кроме Y^{33} , будут обращены в нуль, если предположить, что A_1^3 и A_2^3 равны нулю. (Конечно, другие более сложные предположения приводят к тому же результату.)

Точно так же, чтобы в центральном 2-тензоре Y^{22} член Y^{22} имел вид Y^{22} без дополнительных сомножителей, надо положить A_2^2 равным единичному тензору I . (Возможны другие предположения; данное предположение сделано только для упрощения результата.)

Следовательно, если $A_1^3=0$, $A_2^3=0$, $A_2^2=I$, то Y' приобретает вид

| | 1' | 2' | 3' |
|---------|---|--|---|
| 1' | $A_{1f}^{1*} (Y^{11}A_1^1 + Y^{12}A_2^1 + Y^{13}A_3^1)$ $+ A_{2f}^{1*} (Y^{21}A_1^1 + Y^{22}A_2^1 + Y^{23}A_3^1)$ $+ A_{3f}^{1*} (Y^{31}A_1^1 + Y^{32}A_2^1 + Y^{33}A_3^1)$ | $A_{1f}^{1*} (Y^{11}A_1^2 + Y^{12} + Y^{13}A_3^2)$ $+ A_{2f}^{1*} (Y^{21}A_1^2 + Y^{22} + Y^{23}A_3^2)$ $+ A_{3f}^{1*} (Y^{31}A_1^2 + Y^{32} + Y^{33}A_3^2)$ | $(A_{1f}^{1*}Y^{13} +$ $A_{2f}^{1*}Y^{23} +$ $A_{3f}^{1*}Y^{33}) A_3^3$ |
| Y' = 2' | $A_{1f}^{2*} (Y^{11}A_1^1 + Y^{12}A_2^1 + Y^{13}A_3^1)$ $+ (Y^{21}A_1^1 + Y^{22}A_2^1 + Y^{23}A_3^1)$ $+ A_{3f}^{2*} (Y^{31}A_1^1 + Y^{32}A_2^1 + Y^{33}A_3^1)$ | $A_{1f}^{2*} (Y^{11}A_1^2 + Y^{12} + Y^{13}A_3^2)$ $+ (Y^{21}A_1^2 + Y^{22} + Y^{23}A_3^2)$ $+ A_{3f}^{2*} (Y^{31}A_1^2 + Y^{32} + Y^{33}A_3^2)$ | $(A_{1f}^{2*}Y^{13} +$ $+ Y^{23} +$ $+ A_{3f}^{2*}Y^{33}) A_3^3$ |
| 3' | $A_{3f}^{3*} (Y^{31}A_1^1 + Y^{32}A_2^1 + Y^{33}A_3^1)$ | $A_{3f}^{3*} (Y^{31}A_1^2 + Y^{32} + Y^{33}A_3^2)$ | $A_{3f}^{3*} Y^{33} A_3^3$ |

(23.32)

V. «Критерий поведения» $Y^{22} - Y^{23'}Y^{33'} - Y^{32'}$; вычисленный из этого тензора, принимает вид

$$\begin{aligned}
 & A_{1f}^{2*} (Y^{11}A_1^2 + Y^{12} + Y^{13}A_3^2) + (Y^{21}A_1^2 + Y^{22} + Y^{23}A_3^2) + \\
 & + A_{3f}^{2*} (Y^{31}A_1^2 + Y^{32} + Y^{33}A_3^2) - (A_{1f}^{2*}Y^{13} + Y^{23} + \\
 & + A_{3f}^{2*}Y^{33}) Y^{33-1} (Y^{31}A_1^2 + Y^{32} + Y^{33}A_3^2). \quad (23.33)
 \end{aligned}$$

Упрощая, критерий приводим к виду

$$A_{1f}^{2*} (Y^{11}A_1^2 + Y^{12}) + Y^{21}A_1^2 + Y^{22} - (A_{1f}^{2*}Y^{13} + Y^{23}) Y^{33-1} (Y^{31}A_1^2 + Y^{32}). \quad (23.34)$$

Если A_1^2 также положить равным нулю, то критерий примет вид $Y^{22} - Y^{23}Y^{33-1}Y^{32}$. Это и есть требуемая форма критерия.

VI. Следовательно, если тензор синтеза имеет вид

$$A_{\sigma} = \begin{array}{c|ccc} & 1' & 2' & 3' \\ \hline 1 & A_1^1 & 0 & 0 \\ \hline 2 & A_2^1 & I & 0 \\ \hline 3 & A_3^1 & A_3^2 & A_3^3 \end{array} \quad (23.35)$$

и существует обратная A_3^3 , то «критерий постоянства тока в нагрузке» по уравнению (23.26) остается инвариантным.

Другими словами, если Y умножается на A_{σ} для нахождения Y' и если критерий устанавливается в терминах Y' , то все компоненты A_{σ} , определенные равенством (23.25), выпадают из выражения критерия независимо от природы, которую имеют различные компоненты A .

Компоненты A могут содержать действительные и комплексные числа или линейные операторы и т. д. Не имеет значения, что они собой представляют, так как они не влияют на постоянство тока в нагрузках. Однако матрица, обратная A_3^3 , должна существовать, поскольку она присутствует при получении критерия в уравнении (23.33).

12. СИНГУЛЯРНЫЙ ТЕНЗОР СИНТЕЗА

I. Следует отметить очень важный факт, заключающийся в том, что, поскольку обратный A_1^1 не требуется, его матрица может иметь любую прямоугольную форму, так что количество осей в группе 1' можно варьировать от нуля до любого числа. Следовательно, новая сеть может иметь как меньше, так и больше узловых пар, чем исходная. Однако имеется абсолютный минимум числа узловых пар, которые должны иметься в новой сети, он равен сумме узловых пар в группах 2 и 3.

Так как матрицы большинства A_{σ} прямоугольные, то обратные им не могут быть вычислены и все множество матриц A_{σ} образует только «полугруппу» (см. гл. 1, § 3), а не «группу». В то время как все предыдущие тензоры преобразования переводили друг в друга только сети с одинаковым числом катушек, тензор синтеза переводит сети с разным числом катушек.

Тензор синтеза $A_{\sigma} = A_{\sigma}^{\alpha}$ можно рассматривать как мультитензор с одним индексом σ , принадлежащим системам координат всех возможных n -катушечных сетей, и с другим индексом α , принадлежащим системам координат всех k -катушечных сетей. В предыдущих исследованиях n -катушечные сети и их координатные оси были независимы от k -катушечных сетей и их осей.

II. Преобразование A_{σ} , помимо других изменений, может включать следующие три изменения: 1) может измениться способ соединения сети; 2) могут измениться импедансы катушек сети; 3) может измениться число катушек сети.

III. Следует подчеркнуть, что данный A_{σ} является не только тензором преобразований, оставляющих инвариантным выходной ток. Зная значение Y , можно подобрать другие, ненулевые значения A_1^2 , A_1^3 и A_2^3 так, что критерий все же будет инвариантным. Эти другие формы A_{σ} здесь не рассматриваются.

13. ВЛИЯНИЕ ПАСИВНЫХ УЗЛОВЫХ ПАР НА A_{σ}

I. Было упомянуто, что критерий $Y^{22} - Y^{23}Y^{33} - Y^{32}$ не включает элементов первой строки и столбца Y уравнения (23.1) и поэтому достаточно вычислить вторую и третью строку и столбец Y' с помощью уменьшенного A_{σ}

$$Y = \begin{array}{c} 2 & 3 \\ \hline Y_{22} & Y_{23} \\ \hline Y_{32} & Y_{33} \end{array}, \quad A_{\sigma} = \begin{array}{c} 2' & 3' \\ \hline 1 & 0 \\ \hline A_3^2 & A_3^3 \end{array}, \quad Y' = \begin{array}{c} 2' & 3' \\ \hline Y^{22'} & Y^{23'} \\ \hline Y^{32'} & Y^{33'} \end{array} \quad (23.36)$$

Влияние дополнительной строки и столбца в Y (которые не используются в критерии) заключается в добавлении столбца к A_{σ} (содержащего произвольные компоненты A_1^1 , A_2^1 и A_3^1), так как умножение на этот дополнительный столбец A_{σ} не меняет необходимых компонент Y' . Таким образом,

$$Y = \begin{array}{c} 1 & 2 & 3 \\ \hline Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} \\ \hline Y_{21} & Y_{22} & Y_{23} \\ \hline Y_{31} & Y_{32} & Y_{33} \end{array}, \quad A_{\sigma} = \begin{array}{c} 1' & 2' & 3' \\ \hline A_1^1 & 0 & 0 \\ \hline A_2^1 & 1 & 0 \\ \hline A_3^1 & A_3^2 & A_3^3 \end{array}, \quad Y' = \begin{array}{c} 1' & 2' & 3' \\ \hline Y^{11'} & Y^{12'} & Y^{13'} \\ \hline Y^{21'} & Y^{22'} & Y^{23'} \\ \hline Y^{31'} & Y^{32'} & Y^{33'} \end{array} \quad (23.37)$$

Следует повторить (см. гл. 16, § 16), что добавление в S столбцов вдоль дополнительных осей узловых пар (с соответствующим добавлением к z) не меняет компонент z' вдоль других контурных осей. Подобным образом здесь добавление столбца $1'$ к A_{σ} (и соответствующего добавления столбца и строки 1 к Y) не изменяет компонент Y' вдоль других осей $2'$ и $3'$. Так как A_{σ} может иметь дополнительные ненулевые компоненты только

вдоль добавленных столбцов, то добавочные компоненты вдоль других столбцов равны нулю.

Следовательно, при расчете тензора синтеза достаточно преобразовать лишь те компаунд-оси Y (или z), которые играют роль в критерии. Остальные компаунд-оси добавляют в тензор синтеза то же число произвольных столбцов.

II. Так как в приведенном примере Y содержит еще другие компаунд-оси 4, представляющие игнорируемые контурные оси, то тензор синтеза содержит еще один произвольный столбец

$$Y = \begin{array}{c|cccc} & 4 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & Y_{44} & Y_{41} & Y_{42} & Y_{43} \\ \hline 1 & Y_{14} & Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} \\ \hline 2 & Y_{24} & Y_{21} & Y_{22} & Y_{23} \\ \hline 3 & Y_{34} & Y_{31} & Y_{32} & Y_{33} \\ \hline \end{array}, \quad (23.38)$$

$$A_{\sigma} = \begin{array}{c|cccc} & 4' & 1' & 2' & 3' \\ \hline 4 & A_4^4 & A_4^1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & A_1^4 & A_1^1 & 0 & 0 \\ \hline 2 & A_2^4 & A_2^1 & I & 0 \\ \hline 3 & A_3^4 & A_3^1 & A_3^2 & A_3^3 \\ \hline \end{array}. \quad (23.39)$$

При использовании этого тензора сеть надо рассматривать как полную.

Так как A_{σ} может не иметь обратного, то новая сеть может иметь произвольное число контурных осей $4'$.

III. Другими словами, если некоторая сеть имеет уравнение (23.38) в качестве тензора адмиттанса и при этом поддерживает постоянный ток в нагрузке I^2 , то тензор адмиттанса можно умножить на A_{σ} (из (23.39)), который поменяет соединения, число катушек и адмиттансы катушек, но новая сеть также будет поддерживать постоянный ток $I^{2'}$ в нагрузке.

Однако этот ток $I^{2'}$ уже не равен току I^2 , так как из уравнения (23.4) $I^2 = (Y^{21} - Y^{23}Y^{33-1}Y^{31})E_1$ и коэффициент при E_1 не остается инвариантным после преобразования Y с помощью A_{σ} из уравнения (23.39).

14. ТЕНЗОР СИНТЕЗА ДЛЯ «НЕИЗМЕННОГО ВЫХОДНОГО ТОКА»

I. Предположим теперь, что необходимо не только поддерживать постоянным $I^{2'}$ при переменной нагрузке, но и сохранить новое значение $I^{2'}$ после преобразования таким же, каким оно было до преобразования. Другими словами, пусть A_{σ} сохраняет не только коэффициент при E_2 во втором уравнении (23.2), а именно инвариантным $Y^{22} - Y^{23}Y^{33-1}Y^{32}$, но и коэффициент при E_1 , а именно $Y^{21} - Y^{32}Y^{33-1}Y^{31}$.

В этом втором критерии все три оси Y имеют компоненты, следовательно, только оси, которыми пренебрегают, являются контурными осями 4.

II. Из уравнения (23.32) (где теперь также A_1^2 равно нулю) этот последний критерий есть

$$Y^{21}A_1^1 + Y^{22}A_2^1 + Y^{23}A_3^1 + A_{3f}^{2*}(Y^{31}A_1^1 + Y^{32}A_2^1 + Y^{33}A_3^1) - \\ - (Y^{23}A_3^3 + A_{3f}^{2*}Y^{33}A_3^3)A_3^{3-1}Y^{33-1}A_{3f}^{3*-1}A_{3f}^{3*}(Y^{31}A_1^1 + Y^{32}A_2^1 + Y^{33}A_3^1). \quad (23.40)$$

Упрощая, получаем критерий

$$Y^{22}A_1^1 + Y^{22}A_2^1 - Y^{23}Y^{33-1}(Y^{31}A_1^1 + Y^{32}A_2^1).$$

Если A_2^1 положить равным нулю и A_1^1 — равным I, то получим критерий $Y^{21} - Y^{23}Y^{33-1}Y^{31}$.

III. Следовательно, величина I^2 остается одинаковой при всех преобразованиях, если A_σ имеет вид

$$A_\sigma = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & 1' & 2' & 3' \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{array}{|c|c|c|} \hline I & & \\ \hline & I & \\ \hline A_3^1 & A_3^2 & A_3^3 \\ \hline \end{array} & & \end{array} \end{array} \quad (23.41)$$

Влияние опущенных контурных осей сводится к добавлению произвольного четвертого столбца к A_σ , следовательно, *полный тензор синтеза*

$$A_\sigma = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & 4' & 1' & 2' & 3' \\ \begin{array}{c} 4 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline A_4^4 & & & \\ \hline A_1^4 & I & & \\ \hline A_2^4 & & I & \\ \hline A_3^4 & A_3^1 & A_3^2 & A_3^3 \\ \hline \end{array} & & & \end{array} \end{array}, \quad (23.42)$$

где A_4^4 может иметь прямоугольную форму.

IV. Простые вычисления показывают, что этот последний A_σ оставляет коэффициенты при E_1 и E_2 в первом уравнении (23.2) неизменными.

Таким образом, A_σ уравнения (23.42) оставляет неизменными все явления, происходящие на входных и выходных осях 1 и 2. Следует заметить, что вдоль этих инвариантных осей A_σ содержит только единичные тензоры I.

V. Вычисления также показывают, что приведенный выше тензор синтеза был бы найден, если критерием был бы отдельно $Y^{21} - Y^{23}Y^{33-1}Y^{31}$ или $Y^{12} - Y^{13}Y^{33-1}Y^{32}$.

Этот последний критерий оставляет постоянным генераторный ток I^1 . Его необходимо поддерживать постоянным, поскольку требуется поддерживать постоянным в то же время и выходной ток I^2 . Это нужно потому, что некоторые компоненты A были без особой необходимости приравнены нулю. Их можно определить как функции некоторых Y . Для упрощения результатов здесь это не сделано.

15. ТЕНЗОР СИНТЕЗА ДЛЯ «ПОСТОЯНСТВА РАЗНОСТИ ПОТЕНЦИАЛОВ»

I. Критерием постоянства разностей потенциалов E_3 на некоторых пассивных узловых парах является равенство нулю некоторой комбинации компонентов компаунд-тензора адмиттанса Y , имеющего четыре строки и четыре столбца, а именно $Y^{32} - Y^{34}Y^{44-1}Y^{42} = 0$ (уравнение (23.7)).

Так как в этом критерии не участвуют компоненты первой строки и столбца Y , то достаточно изучить изменения в оставшихся трех строках и столбцах Y , а именно в

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc}
 & 2 & 3 & 4 \\
 2 & \boxed{Y_{22} \mid Y_{23} \mid Y_{24}} \\
 Y=3 & \boxed{Y_{32} \mid Y_{33} \mid Y_{34}} \\
 4 & \boxed{Y_{42} \mid Y_{43} \mid Y_{44}}
 \end{array}
 \rightarrow
 \begin{array}{ccc}
 & 2 & 3 & 4 \\
 2 & \boxed{Y_{11} \mid Y_{12} \mid Y_{13}} \\
 & \boxed{Y_{21} \mid Y_{22} \mid Y_{23}} \\
 4 & \boxed{Y_{31} \mid Y_{32} \mid Y_{33}}
 \end{array}
 ,
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc}
 & 2' & 3' & 4' \\
 2 & \boxed{A_1^1 \mid A_1^2 \mid A_1^3} \\
 A_\sigma=3 & \boxed{A_2^1 \mid A_2^2 \mid A_2^3} \\
 4 & \boxed{A_3^1 \mid A_3^2 \mid A_3^3}
 \end{array}
 \end{array}
 \quad (23.43)$$

II. Поменяем индексы подстановкой (см. (23.43)), чтобы использовать некоторые результаты § II. Критерий становится $Y^{21} - Y^{23}Y^{33-1}Y^{31} = 0$.

Произведение $A_{\sigma t}^* Y A_\sigma$ показано в уравнении (23.31). Поскольку необходимо, чтобы обратная Y^{33} оставалась неизменной, здесь также $A_1^3 = 0$ и $A_2^3 = 0$.

Для сохранения тензора $Y^{21'}$ равным Y^{21} положим $A_2^2 = I$ и $A_1^1 = I$. С этими значениями уравнение (23.31) переходит в (23.32), в котором также $A_1^1 = I$.

III. Критерий $Y^{21} - Y^{23}Y^{33-1}Y^{31}$ из уравнения (23.32) будет

$$\begin{aligned}
 & A_{1t}^{2*} (Y^{11} + Y^{12}A_2^1 + Y^{13}A_3^1) + Y^{21} + Y^{22}A_2^1 + \\
 & + Y^{23}A_3^1 + A_{3t}^{2*} (Y^{31} + Y^{32}A_2^1 + Y^{33}A_3^1) - \\
 & - (A_{1t}^{2*}Y^{13} + Y^{23} + A_{3t}^{2*}Y^{33}) Y^{33-1} (Y^{31} + Y^{32}A_2^1 + Y^{33}A_3^1). \quad (23.44, a)
 \end{aligned}$$

Упрощая, получаем критерий

$$\begin{aligned}
 & A_{1t}^{2*} (Y^{11} + Y^{12}A_2^1) + Y^{21} + Y^{22}A_2^1 - \\
 & - (A_{1t}^{2*}Y^{13} + Y^{23}) Y^{33-1} (Y^{31} + Y^{32}A_2^1). \quad (23.44, b)
 \end{aligned}$$

Если $A_1^2=0$ и $A_2^1=0$, то получаем $Y^{21}-Y^{23}Y^{33-1}Y^{31}$. Следовательно, тензор синтеза имеет тот же вид, что и в уравнении (23.41).

Изменим штрихи у компонентов A_σ и добавим два произвольных столбца вдоль опущенных осей узловых пар 1 и вдоль игнорируемых контурных осей 5; тогда тензор синтеза

$$A_\sigma = \begin{array}{c|ccccc} & 5' & 1' & 2' & 3' & 4' \\ \hline 5 & A_5^5 & A_5^1 & & & \\ \hline 1 & A_1^5 & A_1^1 & & & \\ \hline 2 & A_2^5 & A_2^1 & I & & \\ \hline 3 & A_3^5 & A_3^1 & & I & \\ \hline 4 & A_4^5 & A_4^1 & A_4^2 & A_4^3 & A_4^4 \end{array} \quad (23.45)$$

16. ТЕНЗОР СИНТЕЗА «ПОСТОЯНСТВА ВХОДНОГО ИМПЕДАНСА»

I. Чтобы импеданс относительно нескольких входных зажимов оставался постоянным, критерий (уравнение (23.13))

$z_{11} - z_{12} z_{22}^{-1} z_{21}$ должен оставаться инвариантным, хотя взаимосоединения катушек или импедансы изменяются под действием C_σ . Задача состоит в нахождении вида C_σ . Пусть

$$z = \begin{array}{c|cc} & 1 & 2 \\ \hline 1 & z_{11} & z_{12} \\ \hline 2 & z_{21} & z_{22} \end{array}, \quad C_\sigma = \begin{array}{c|cc} & 1' & 2' \\ \hline 1 & C_1^1 & C_1^2 \\ \hline 2 & C_2^1 & C_2^2 \end{array}. \quad (23.46)$$

После преобразования $C_{\sigma'}^* z C_\sigma$ импеданс сети будет

$$z' = \begin{array}{c|cc} & 1' & 2' \\ \hline 1' & (C_{11}^{1*} z_{11} + C_{11}^{2*} z_{21}) C_1^1 + (C_{11}^{1*} z_{12} + C_{11}^{2*} z_{22}) C_1^2 & (C_{12}^{1*} z_{11} + C_{12}^{2*} z_{21}) C_2^1 + (C_{12}^{1*} z_{12} + C_{12}^{2*} z_{22}) C_2^2 \\ \hline 2' & (C_{21}^{1*} z_{11} + C_{21}^{2*} z_{21}) C_1^1 + (C_{21}^{1*} z_{12} + C_{21}^{2*} z_{22}) C_1^2 & (C_{22}^{1*} z_{11} + C_{22}^{2*} z_{21}) C_2^1 + (C_{22}^{1*} z_{12} + C_{22}^{2*} z_{22}) C_2^2 \end{array} \quad (23.47)$$

II. Для нахождения обратной матрицы в правом нижнем углу предположим, что $C_2^1=0$. Чтобы оставить неизменным верхний левый тензор, предположим, что $C_1^1=I$. Следовательно, принимая

$$C_{\sigma} = \begin{array}{c} 1' \quad 2' \\ \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 0 \\ \hline C_1^2 & C_2^2 \\ \hline \end{array} \end{array} \quad (23.48)$$

в качестве тензора синтеза, имеем тензор импеданса после преобразования

$$z' = \begin{array}{c} 1' \quad 2' \\ \begin{array}{|c|c|} \hline z_{11} + z_{12}C_1^2 + C_{1i}^2 z_{21} + C_{1i}^{2'} z_{22} C_1^2 & z_{12}C_2^2 + C_{1i}^{2*} z_{22} C_2^2 \\ \hline C_{2i}^{2*} z_{21} + C_{2i}^{2*} z_{22} C_1^2 & C_{2i}^{2*} z_{22} C_2^2 \\ \hline \end{array} \end{array} \quad (23.49)$$

III. Входной импеданс относительно осей 1' по формулам редукции равен

$$z'_{11} - z'_{12} z_{22}^{-1} z'_{21} = (z_{11} + z_{12} C_1^2 + C_{1i}^{2*} z_{21} + C_{1i}^{2*} z_{22} C_1^2) - \\ - (z_{12} C_2^2 + C_{1i}^{2*} z_{22} C_2^2) (C_{2i}^{2*} z_{22} C_2^2)^{-1} (C_{2i}^{2*} z_{21} + C_{2i}^{2*} z_{22} C_1^2).$$

Упрощая, получаем

$$z'_{11} - z'_{12} z_{22}^{-1} z'_{21} = z_{11} - z_{12} z_{22}^{-1} z_{21}. \quad (23.50)$$

Следовательно, входной импеданс (критерий поведения) и после преобразования, и до преобразования одинаков. Компоненты C_{σ} выпадают из рассмотрения.

Вместе с опущенными осями узловых пар 3', тензор синтеза, сохраняющий неизменным входной импеданс асимметричной сети, равен

$$C_{\sigma} = \begin{array}{c} 1' \quad 2' \quad 3' \\ \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & & C_3^1 \\ \hline C_1^2 & C_2^2 & C_3^2 \\ \hline 3 & & C_3^3 \\ \hline \end{array} \end{array}, \quad (23.51)$$

где C_3^3 может иметь любую прямоугольную форму.

IV. Подобным образом C_{σ} используется, если вместо входного импеданса $z_{11} - z_{12} z_{22}^{-1} z_{21}$ надо поддерживать инвариантным входной адмиттанс $Y^{11} - Y^{12} Y^{22-1} Y^{21}$. Например, чтобы оставить неизменным одновременно и входной и выходной адмиттансы (уравнение (23.24), содержащее адмиттансы размыканий) вдоль осей 1 и 2, тензор синтеза должен иметь вид

$$A_{\sigma} = \begin{array}{c|c|c|c|} & 1' & 2' & 3' & 4' \\ \hline 1 & I & & & A_1^4 \\ \hline 2 & & I & & A_2^4 \\ \hline 3 & A_3^1 & A_3^2 & A_3^3 & A_3^4 \\ \hline 4 & & & & A_4^4 \\ \hline \end{array} \quad (23.52)$$

V. Приведем другой пример. Чтобы поддерживать напряжение E_2 на нагрузках постоянным, необходимо в уравнении (23.10) иметь постоянный адмиттанс на группе осей 3, а именно $Y^{33'}$, при наличии пассивных узловых пар группы 4. Следовательно,

$$A_{\sigma} = \begin{array}{c|c|c|c|} & 1' & 2' & 3' & 4' \\ \hline 1 & A_1^1 & A_1^2 & & \\ \hline 2 & A_2^1 & A_2^2 & & \\ \hline 3 & A_3^1 & A_3^2 & I & \\ \hline 4 & A_4^1 & A_4^2 & A_4^3 & A_4^4 \\ \hline \end{array} \quad \text{или} \quad A_{\sigma} = \begin{array}{c|c|c|c|c|} & 1' & 2' & 3' & 4' & 5' \\ \hline 1 & A_1^1 & A_1^2 & & & A_1^5 \\ \hline 2 & A_2^1 & A_2^2 & & & A_2^5 \\ \hline 3 & A_3^1 & A_3^2 & I & & A_3^5 \\ \hline 4 & A_4^1 & A_4^2 & A_4^3 & A_4^4 & A_4^5 \\ \hline 5 & A_5^1 & A_5^2 & & & A_5^5 \\ \hline \end{array} \quad (23.53)$$

где 5 — отброшенные контурные компаунд-оси.

VI. Допустим, что все пассивные контуры предыдущей сети содержат приложенные напряжения e_2 , так что вектор напряжения e до и после преобразования C_{σ} (уравнение (23.48))

$$e = \begin{array}{c|c} 1 & e_1 \\ \hline 2 & e_2 \end{array}, \quad (23.54) \quad e' = C_{\sigma t}^* e = \begin{array}{c|c} 1' & e_1 + C_{1t}^{2*} e_2 \\ \hline 2' & C_{2t}^{2*} e_2 \end{array}. \quad (23.55)$$

VII. Второй критерий (уравнение (23.16)) с использованием (23.54) и (23.49)

$$e_4 = e_1' - z_{12}' z_{22}'^{-1} e_2' = e_1 + C_{1t}' e_2 - \\ - (z_{12} C_2^2 + C_{1t}^{2*} z_{22} C_2^2) C_2^{2-1} z_{22}^{-1} C_{2t}^{2* -1} (C_{2t}^{2*} e_2) = e_1 - z_{12} z_{22}^{-1} e_2. \quad (23.56)$$

Следовательно, предыдущие тензоры синтеза пригодны для случая, когда пассивные контуры или узловые пары содержат

приложенные напряжения или токи, так как они оставляют инвариантными как входной импеданс, так и входное напряжение активной сети.

VIII. Частный случай упрощенного тензора синтеза (23.48) (без включения осей узловых пар группы 3) был установлен Кауэром. В тензоре синтеза Кауэра:

1) компоненты C_{σ} , а именно C_1^2 и C_2^2 , могут содержать только действительные числа;

2) сеть *симметрична* и содержит только сосредоточенные сопротивления, индуктансы и эластансы;

3) сеть *пассивна*.

Ограничения тензора синтеза Кауэра происходят от того, что при его определении не использовалось понятие «критерия поведения», а именно, что входной импеданс $z_{11} - z_{12}z_{22}^{-1}z_{21}$ не изменяется, но он был установлен в предположении одновременной неизменности трех действительных квадратичных форм. Эти три действительные квадратичные формы есть iri , $i\pi/2$ и $isi/2$ контурной сети.

Следует заметить, что вообще с рассмотренными в данной главе сетями не ассоциировались никакие квадратичные (или эрмитовы) формы, поскольку не обязательно предполагать, что сети неподвижны и симметричны.

17. «ПРИМИТИВНЫЙ» ТЕНЗОР СИНТЕЗА

I. Тензор синтеза C_{σ}' изменяет z_1' (или Y^1) сети на z_2' (или Y^2) другой сети, имеющей тот же характер поведения. Так как компоненты z_1' и z_2' представляют собственные и взаимные импедансы различных катушек, соединенных в замкнутые или открытые контуры, то было бы весьма трудно определить импедансы отдельных катушек.

Тензор синтеза C_{σ} можно установить между отдельными катушками, вместо того чтобы определять его между их контурами и узловыми парами. Это значит, что с помощью C_{σ} можно найти непосредственно собственные и взаимные импедансы отдельных катушек второй сети через собственные и взаимные импедансы отдельных катушек первой сети. Этот дополнительный шаг очень важен, поскольку намного легче иметь дело с собственными взаимными импедансами отдельных катушек с точки зрения, например, их физической реализуемости, чем это делать с собственными и взаимными импедансами целых контуров как замкнутых, так и открытых.

II. C_{σ} отдельных катушек можно найти из C_{σ}' контуров (определенного в предыдущих параграфах) с помощью следующих шагов:

1) C_1 — тензор преобразования исходной сети, изменяющий z_1 на z_1' с помощью $C_1'z_1C_1 = z_1'$;

2) C_2 — тензор преобразования новой сети, изменяющий z_2 на z_2' с помощью $C_{2t}^* z_2 = z_2'$;

3) C_σ' — тензор синтеза сети, преобразующий z_1' в z_2' с помощью $C_{\sigma t}^* z_1' C_\sigma' = z_2'$; предполагается, что он известен. В общем случае это сингулярная матрица.

4) C_σ — примитивный тензор синтеза (который надо найти), преобразующий z_1 в z_2 с помощью $C_{\sigma t}^* z_1 C_\sigma = z_2$.

Так как две сети имеют разное число катушек, C_1 и C_2 имеют разное число строк и столбцов.

Подставляем 1 и 2 в 3: $C_{\sigma t}^* (C_{1t}^* z_1 C_1) C_\sigma' = C_{2t}^* z_2 C_2$. Переносим C_{2t}^* и C_2 в левую часть уравнения: $C_{2t}^*{}^{-1} C_{\sigma t}^* C_{1t}^* z_1 C_1 C_\sigma' C_2^{-1} = z_2$.

Сравнивая с 4 отдельный тензор синтеза C_σ , преобразующий z_1 в z_2 , находим его из исходного тензора C_σ' с помощью

$$C_\sigma = C_1 C_\sigma' C_2^{-1}, \quad (23.57)$$

где C_1 — тензор преобразования первой сети; C_2 — тензор преобразования второй сети.

Так как для вычисления C_σ необходимо существование матрицы, обратной C_2 , то при определении C_σ' каждая сеть рассматривается как полная ортогональная сеть.

III. При изменении Y^1 в Y^2 каждая C заменяется на C_t^{*-1} , так что

$$C_{\sigma t}^{*-1} = C_{1t}^{*-1} C_{\sigma t}^*{}^{-1} C_{2t}^* \quad \text{или} \quad A_\sigma = A_1 A_\sigma' A_2^{-1}. \quad (23.58)$$

IV. Если имеется в виду изменение не самой сети, а лишь импедансов отдельных катушек, то $C_2 = C_1$. Это значит, что импедансы отдельных катушек некоторой сети можно изменить тензором преобразования

$$C_\sigma = C_1 C_\sigma' C_1^{-1}, \quad (23.59)$$

не изменяя при этом характеристики поведения сети.

Конечно, каждая катушка сама может быть компунд-катушкой, представляющей целую сеть.

18. ПРИМЕР ДВУХ ЭКВИВАЛЕНТНЫХ СЕТЕЙ

I. Пусть даны три катушки с асимметричными взаимными импедансами, образующие два контура и одну узловую пару (рис. 23.8, а). Рассматривая их как полную сеть, имеем C и C^{-1}

$$C_1 = \begin{array}{c} 1_1 \\ 2_1 \\ 3_1 \end{array} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & & \\ \hline & & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}, \quad (23.60)$$

$$C_1^{-1} = \begin{array}{c} 1_1' \\ 2_1' \\ 3_1' \end{array} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & & \\ \hline & 1 & \\ \hline 1 & -1 & -1 \\ \hline \end{array}. \quad (23.61)$$

Относительно e_1 эта сеть имеет определенный импеданс Z_1^{\bullet} .

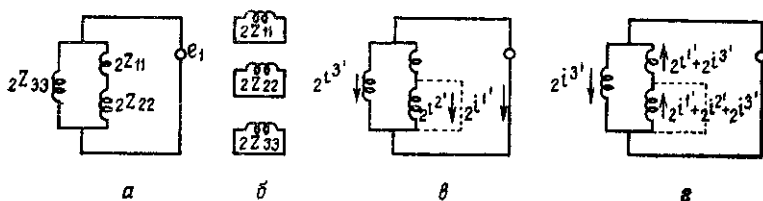


Рис. 23.8. Первая сеть с тремя катушками.

II. Пусть дана другая сеть (рис. 23.9), в которой соединены четыре катушки, образуя два контура и две узловые пары (каж-

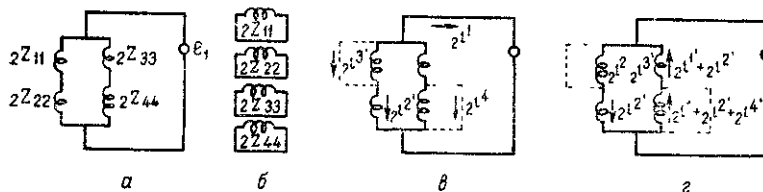


Рис. 23.9. Вторая сеть с четырьмя катушками.

дая катушка может представлять эквивалентный импеданс целой сети). Так как это полная сеть, C и C^{-1} можно выразить так:

$$C_2 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1_2 & 2_2 & 3_2 & 4_2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1_2 \\ 2_2 \\ 3_2 \\ 4_2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} & 1 & -1 & \\ & 1 & & \\ 1 & 1 & & \\ 1 & 1 & & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad C_2^{-1} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1_2 & 2_2 & 3_2 & 4_2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1_2 \\ 2_2 \\ 3_2 \\ 4_2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} & -1 & 1 & \\ & 1 & & \\ -1 & 1 & & \\ & & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (23.62)$$

Задача состоит в том, чтобы найти собственные и взаимные импедансы четырех катушек второй сети z_2 в терминах трех катушек исходной сети z_1

$$z_1 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1_1 & 2_1 & 3_1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1_1 \\ 2_1 \\ 3_1 \end{matrix} & \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \\ Z_{21} & Z_{22} & \\ & & Z_{33} \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (23.63) \quad z_2 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1_2 & 2_2 & 3_2 & 4_2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1_2 \\ 2_2 \\ 3_2 \\ 4_2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} Z'_{11} & Z'_{12} & Z'_{13} & Z'_{14} \\ Z'_{21} & Z'_{22} & Z'_{23} & Z'_{24} \\ Z'_{31} & Z'_{32} & Z'_{33} & Z'_{34} \\ Z'_{41} & Z'_{42} & Z'_{43} & Z'_{44} \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (23.64)$$

так, чтобы при этом обе сети имели один и тот же входной импеданс относительно приложенного напряжения e_1 .

III. Тензор импеданса z_1' исходной сети (не полученный) можно умножить на тензор синтеза C_σ из уравнения (23.51)

$$C'_\sigma = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & & C_3^1 \\ \hline C_1^2 & C_2^2 & C_3^2 \\ \hline & & C_3^3 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{l} 1'_1 \\ 2'_1 \\ 3'_1 \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1_2 & 2_2 & 3_2 & 4_2 \\ \hline 1 & & k_3 & k_6 \\ \hline k_1 & k_2 & k_4 & k_7 \\ \hline & & k_5 & k_8 \\ \hline \end{array}, \quad (23.65)$$

где компоненты k — действительные или комплексные числа или операторы, дающие тензор импеданса z_2' новой сети (неустановленный).

Пусть теперь C_σ' — отдельный тензор синтеза, с помощью C_σ изменяющий импедансы примитивной сети (а именно, изменяющий z_1 на z_2) по уравнению (23.58). Следовательно, $C_1 C'_\sigma C_2^{-1} =$

$$= \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & & \\ \hline & 1 & \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & & k_3 & k_6 \\ \hline k_1 & k_2 & k_4 & k_7 \\ \hline & & k_5 & k_8 \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & -1 & 1 & \\ \hline & 1 & & \\ \hline -1 & 1 & & \\ \hline & & -1 & 1 \\ \hline \end{array} =$$

$$= \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline -k_3 & k_3 - 1 & 1 - k_2 & k_6 \\ \hline -k_4 & k_2 + k_4 - k_1 & k_1 - k_7 & k_7 \\ \hline -k_3 - k_4 - k_5 & k_3 + k_4 + k_5 + k_2 - k_1 - 1 & 1 + k_1 - k_6 - k_7 - k_8 & k_6 + k_7 + k_8 \\ \hline \end{array} =$$

$$\begin{array}{l} 1_1 \\ 2_1 \\ 3_1 \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline K_1 & K_2 & K_3 & K_4 \\ \hline K_5 & K_6 & K_7 & K_8 \\ \hline K_9 & K_{10} & K_{11} & K_{12} \\ \hline \end{array} \quad (23.66)$$

где k — произвольные величины.

IV. Тензор импеданса z_2 примитивной сети (рис. 23.9) найдем как $C_{st}^* z_1 C_\sigma = z_2$ (см. (23.67) на стр. 688).

Эта матрица представляет значения собственных и взаимных импедансов четырех катушек (рис. 23.9) через соответствующие значения для трех катушек сети (рис. 23.8).

| | 1_2 | 2_2 | 3_2 | 4_2 |
|-------|--|---|---|---|
| 1_2 | $K_{1f}^* (K_1 Z_{11} + K_5 Z_{12}) +$ $+ K_{5f}^* (K_1 Z_{21} + K_5 Z_{22}) +$ $+ K_{9f}^* K_9 Z_{33}$ | $K_{1f}^* (K_2 Z_{11} + K_6 Z_{12}) +$ $+ K_{5f}^* (K_2 Z_{21} + K_6 Z_{22}) +$ $+ K_{9f}^* K_{10} Z_{33}$ | $K_{1f}^* (K_3 Z_{11} + K_7 Z_{12})$ $K_{5f}^* (K_3 Z_{21} + K_7 Z_{22})$ $K_{9f}^* K_{11} Z_{33}$ | $K_{1f}^* (K_4 Z_{11} + K_8 Z_{12})$ $K_{5f}^* (K_4 Z_{21} + K_8 Z_{22})$ $K_{9f}^* K_{12} Z_{33}$ |
| 2_2 | $K_{2f}^* (K_1 Z_{11} + K_5 Z_{12}) +$ $+ K_{6f}^* (K_1 Z_{21} + K_5 Z_{22}) +$ $+ K_{10f}^* K_9 K_{33}$ | $K_{2f}^* (K_2 Z_{11} + K_6 Z_{12}) +$ $+ K_{6f}^* (K_2 Z_{21} + K_6 Z_{22}) +$ $+ K_{10f}^* K_{10} Z_{33}$ | $K_{2f}^* (K_3 Z_{11} + K_7 Z_{12})$ $K_{6f}^* (K_3 Z_{21} + K_7 Z_{22})$ $K_{10f}^* K_{11} Z_{33}$ | $K_{2f}^* (K_4 Z_{11} + K_8 Z_{12})$ $K_{6f}^* (K_4 Z_{21} + K_8 Z_{22})$ $K_{10f}^* K_{12} Z_{33}$ |
| 3_2 | $K_{3f}^* (K_1 Z_{11} + K_5 Z_{12}) +$ $+ K_{7f}^* (K_1 Z_{21} + K_5 Z_{22}) +$ $+ K_{11f}^* K_9 K_{33}$ | $K_{3f}^* (K_2 Z_{11} + K_6 Z_{12}) +$ $+ K_{7f}^* (K_2 Z_{21} + K_6 Z_{22}) +$ $+ K_{11f}^* K_{10} Z_{33}$ | $K_{3f}^* (K_3 Z_{11} + K_7 Z_{12})$ $K_{7f}^* (K_3 Z_{21} + K_7 Z_{22})$ $K_{11f}^* K_{11} Z_{33}$ | $K_{3f}^* (K_4 Z_{11} + K_8 Z_{12})$ $K_{7f}^* (K_4 Z_{21} + K_8 Z_{22})$ $K_{11f}^* K_{12} Z_{33}$ |
| 4_2 | $K_{4f}^* (K_1 Z_{11} + K_5 Z_{12}) +$ $+ K_{8f}^* (K_1 Z_{21} + K_5 Z_{22}) +$ $+ K_{12f}^* K_9 Z_{33}$ | $K_{4f}^* (K_2 Z_{11} + K_6 Z_{12}) +$ $+ K_{8f}^* (K_2 Z_{21} + K_6 Z_{22}) +$ $+ K_{12f}^* K_{10} Z_{33}$ | $K_{4f}^* (K_3 Z_{11} + K_7 Z_{12})$ $K_{8f}^* (K_3 Z_{21} + K_7 Z_{22})$ $K_{12f}^* K_{11} Z_{33}$ | $K_{4f}^* (K_4 Z_{11} + K_8 Z_{12})$ $K_{8f}^* (K_4 Z_{21} + K_8 Z_{22})$ $K_{12f}^* K_{12} Z_{33}$ |

Различные k следует выбирать так, чтобы четыре катушки были физически реализуемы. Конечно, некоторые k в S_4^* можно положить равными нулю, в то время как диагональные k — равными единичным значениям.

Следует особо заметить, что вторая сеть (имеющая тот же входной импеданс, что и исходная сеть) была определена без расчета матрицы импеданса или критерия поведения, или входных импедансов сетей.

Из простого значения отдельного тензора синтеза S_0 уравнения (23.66) можно предсказать без дополнительных расчетов, что две сети (рис. 23.8 и 23.9) имеют один и тот же входной импеданс относительно e_1 .

19. ФИЗИЧЕСКАЯ РЕАЛИЗУЕМОСТЬ КАТУШЕК

В качестве предварительных шагов в определении произвольных k можно упомянуть следующие:

1) первым условием физической реализуемости катушек является то, что взаимные индуктивности в уравнении (23.67), а именно недиагональные компоненты, должны иметь вид jX ; это условие налагает некоторые ограничения на значения k в терминах Z ;

2) можно потребовать, чтобы некоторые или все взаимные индуктивности равнялись нулю; это требование еще более ограничивает возможный произвол k ;

3) еще одним условием является то, что взаимные индуктивности должны быть меньше собственных индуктивностей; это условие устанавливает верхние и нижние границы значений k .

20. ТРИ ПРОИЗВОЛЬНЫХ МНОЖЕСТВА ВЕЛИЧИН В СИНТЕЗЕ СЕТЕЙ

1. Когда определен критерий поведения требуемых характеристик сети, но еще нет сети, константы которой удовлетворяют критерию, *удобно выбрать примитивную сеть с некоторым произвольным числом катушек в качестве исходной точки* и установить (на бумаге) параметры примитивной сети, не уделяя внимания ее физической реализуемости. Большинство ее параметров можно выбрать произвольно, а остальные выбрать так, чтобы удовлетворить критерию. *Если работа сети не должна зависеть от частоты, примитивная сеть, служащая стартовой точкой, может содержать только сопротивления.*

Например, для поддержания постоянного тока в нагрузке критерий, которому удовлетворяют катушки, выбирается из уравнения (23.3)

$$Y^{22} = Y^{23}Y^{33} - 1Y^{32}. \quad (23.69)$$

Следовательно, тензор адмиттанса Y примитивной сети разделен на $4^2 = 16$ тензоров-компонент (одна из четырех групп —

игнорируемые контуры), 15 тензоров можно выбрать произвольно, и в то же время диагональный тензор Υ^{22} будет удовлетворять последнему условию.

II. На множестве этих произвольных тензоров можно определить две операции: 1) катушки могут быть взаимосоединены в произвольно выбранную сеть с помощью несингулярного S ; 2) тензоры могут быть умножены на тензор синтеза S' , компоненты которого в большинстве случаев произвольны.

III. Следовательно, для нахождения сети с предписанными характеристиками поведения необходимо выделить конечные значения из трех произвольных множеств значений:

1) произвольные компоненты тензора импеданса исходной предполагаемой примитивной сети, удовлетворяющие «критерию поведения»;

2) компоненты тензора преобразования произвольно выбираемой сети, показывающие способ взаимосоединений и т. д.;

3) произвольные компоненты тензора синтеза.

Значения этих произвольных величин фиксируются из условий физической реализуемости катушек и экономических факторов.

«ТЕНЗОРНЫЙ АНАЛИЗ СЕТЕЙ» Г. КРОНА И ЕГО РОЛЬ В ПРОЕКТИРОВАНИИ СИСТЕМ

В настоящее время стало банальным говорить о необходимости применения математики к решению технических проблем. Остается не очень ясным вопрос о том, что значит «использовать математику» в техническом проектировании. Принимая, что роль математики очень велика, нужно понять ее «историческое назначение». В этом вопросе точка зрения инженера-пользователя не совпадает с точкой зрения математика-разработчика. Эта точка зрения инженера-пользователя и представлена в настоящей книге. Г. Крон пишет, что эта книга написана инженером для инженеров, т. е. тем, кто конструирует большие технические системы, для тех, кто будет конструировать большие технические системы.

То, что в книге Г. Крона называется «геометрическим объектом» — это известный инженеру «объект», который в различных системах координат имеет «различный вид». В этом смысле инженер, использующий математику, не нуждается в «теоремах существования» искомого решения: решение существует всегда. Поэтому обращение инженера к математику за консультацией *всегда* имеет смысл и он не натолкнется на ответ математика типа: «Не вижу задачи».

В этой книге не используются «криволинейные» системы координат», т. е. не вводятся операции ковариантного дифференцирования, столь характерные для тензорного анализа. Здесь инженер знакомится с алгеброй тензоров. Для желающих ознакомиться с нарастанием широты обобщений, даваемых Г. Кроном в виде постулатов первого и второго обобщений, можно рекомендовать классические книги О. Веблена («Инварианты дифференциальных квадратичных форм» М., ИЛ, 1948) и О. Веблена и Дж. Уайтхеда («Основания дифференциальной геометрии», М., ИЛ., 1949). Г. Крон дал инженерную интерпретацию этих работ, используя переход к аффинным координатам и аффинным нормальным тензорам.

«Тензорный анализ сетей» — это фактически введение к другим работам Крона, в том числе к диакоптике. В тензорной теории электрических машин показано, что для любой вращающейся электрической машины можно построить эквивалентную неподвижную цепь; эквивалентные электрические цепи были построены для многих фундаментальных уравнений физики, а

также для самых различных технических систем. Диакоптика основана на том, что анализируемая система может быть представлена эквивалентной цепью. Поэтому данная книга не является законченным и логически замкнутым изложением формальной теории, а построена так, что наряду с развитием тензорного анализа неподвижных сетей в ней содержатся многочисленные «перекидные мостики», указывающие путь перехода к другим работам Крона.

Чем же отличаются тензоры сетей Крона от обычных тензоров? Главное отличие заключается в том, что в то время как обычные тензоры обозначают одной буквой набор величин, описывающих некоторую сущность, расположенную в изотропном пространстве топологии, тензоры сетей Крона обозначают одной буквой набор величин, описывающих некоторую сущность, расположенную в анизотропном пространстве совокупности сетей, отличающихся друг от друга способом соединения их элементов, т. е. тензоры Крона относятся к дискретной структуре системы.

Традиционные тензоры суть геометрические объекты, компоненты которых, записанные в некоторой системе координат, при переходе к некоторой другой системе координат преобразуются по определенным правилам.

$$A_{\beta_1 \dots \beta_m}^{\alpha_1 \dots \alpha_n} = C_{\alpha_1}^{\alpha_1'} \dots C_{\alpha_2}^{\alpha_2'} C_{\beta_1}^{\beta_1'} \dots C_{\beta_m}^{\beta_m'} A_{\beta_1' \dots \beta_m'}^{\alpha_1' \dots \alpha_n'}$$

где

$$C_{\alpha_r}^{\alpha_r'} = \frac{\partial x^{\alpha_r'}}{\partial x^{\alpha_r}}$$

— матрица преобразования, элементы которой составляют якобиан перехода от старой системы координат к новой системе координат.

Роль системы координат играют всевозможные виды осей (прямолинейные, криволинейные и т. д.), расположенные в непрерывном пространстве. Роль осей систем координат в дискретном пространстве сетей играют пути, образуемые элементами сети (катушками). Пути бывают двух видов — замкнутые и открытые. Первые Крон называет контурами, вторые — узловыми парами. Эти два вида путей образуют два ортогональных и взаимодополняющих друг друга подпространства в пространстве сети, поэтому существует два вида систем координат — контурные и узловые. Все величины в сети записываются в терминах координатных осей двух подпространств: m — контурных осей и k — узловых пар, между которыми существует соотношение $k + m = n$, где n — число катушек, задающее размерность пространства сети.

Преобразование систем координат в этом пространстве заключается во всевозможных пересоединениях n катушек в сети

различными способами, что приводит к взаимному изменению числа контуров и узловых пар, а также к тому, что вместо старых путей в качестве системы координат выбираются новые пути. В этом смысле все сети, состоящие из одних и тех же n катушек, могут рассматриваться как одна и та же сеть, но представленная в различных системах координат. Поэтому различные сети, отличающиеся друг от друга лишь соединением своих элементов, описываются уравнениями поведения одного типа при условии, что эти уравнения тензорные.

Собственно сеть, состоящую из катушек и соединительных проводов, Крон рассматривает как «мертвую», невозбужденную. Когда сеть возбуждается электромагнитным полем, то на «мертвую» подлежащую сеть накладываются токи и напряжения. В контурах токи являются величинами отклика, а приложенные напряжения — воздействующими величинами, при этом уравнение поведения сети $e_\alpha = Z_{\alpha\beta} i^\beta$. В узловых парах, наоборот, воздействуют токи, а напряжения — отклик; уравнение поведения $I^\alpha = Y^{\alpha\beta} E_\beta$.

В качестве «единичных векторов», расположенных по осям координат (путям в сети, выбираются величины отклика, т. е. m контурных токов i^α и k узловых напряжений E_β .

Для контурной части сети при преобразовании от одной сети к другой контурные токи в старой сети записываются через токи в новой сети (новой системе координат). Коэффициенты при новых токах образуют матрицу преобразования S_α^α' , из $i^\alpha = S_\alpha^\alpha' i^{\alpha'}$.

Для узловой части сети формула преобразования записывается для узловых напряжений $E_\beta = A_\beta^{\beta'} E_{\beta'}$.

Матрицы S_α^α' и $A_\beta^{\beta'}$ представляют вид тензора преобразования в данной системе координат. Именно тензор преобразования является инструментом, с помощью которого записывается структура исследуемой системы. Функции тензора преобразования значительно шире, чем просто соединение катушек сети. На протяжении книги появляются тензоры преобразования, изменяющие число витков в катушках, вводящие гипотетические токи — все это в рамках пространства одной и той же сети. В гл. 23 вводится тензор синтеза, который, помимо других функций, меняет также импедансы и, что самое существенное, — количество катушек, следовательно, изменяет размерность пространства сети. Таким образом, тензор синтеза осуществляет переход от одного пространства сети к другому.

Тензор преобразования дает величины отклика при переходе от одной сети к другой. Чтобы получить закон преобразования других величин сети, необходимо еще одно соотношение. Таким соотношением в случае, когда мы имеем дело с одним и тем же пространством сети, является мощность на входе $e_\alpha i^\alpha$ или на выходе сети $I^\alpha E_\alpha$. При преобразованиях сети, состоящей из n катушек, мощность остается инвариантной. Сам по себе этот факт

достаточно очевиден. Дело в том, что геометрическая модель Крона любой системы представляет собой ортогональную сеть, потоки энергии в единицу времени на входе и выходе которой должны быть равны — закон сохранения потока в сети. Единственные изменения, происходящие в сети, заключаются в том, что те же самые катушки соединяются по-другому, и ни мощность источников, ни нагрузки, ни импедансы катушек не меняются. Поэтому суммарный поток энергии E через сеть (а это и есть мощность $P = dE/dt$) должен оставаться тем же самым. Потоки энергии лишь перераспределяются между путями открытыми и замкнутыми, что и служило источником всех недоразумений. Критики Крона заявляли, что мощность не является инвариантом при контурных (узловых) преобразованиях, когда число контуров (узловых пар) новой сети отличается от их числа в старой сети, и были правы. Однако мощность в ортогональной сети, рассматриваемой как совокупность открытых и замкнутых путей, остается той же самой.

Отметим, что в самой первой работе Дж. К. Максвелла (1855 г.) «О фарадеевых силовых линиях» уже используется инвариантность мощности. Максвелл, построив геометрическую картину эквипотенциальных поверхностей, рассекаемых трубками тока на объемные «клетки», отмечает:

«Поверхности равного давления вырезают из единичных трубок элементы объема длины l и поперечного сечения h . Все эти элементы объема единичных трубок мы назовем единичными клетками. В каждой из них единица объема жидкости переходит в единицу времени от давления P к давлению $P-1$ и потому преодолевает за это время единицу сопротивления. Работа, израсходованная на это жидкостью за единицу времени для каждой единичной клетки, также равна единице» (Дж. К. Максвелл. «Избранные сочинения по теории электромагнитного поля». М., ГИТТЛ, 1954, с. 25—26).

Достаточно заметить, что в стационарном поле общее число клеток постоянно; мы получим в этом утверждении Максвелла закон постоянства величины рассеиваемой мощности.

Если из «трубок тока» Максвелла образовать сеть, то инвариантом такой сети и будет мощность.

Инвариантность мощности тесно связана с несингулярностью тензора преобразования. Контурная и узловая матрицы преобразования сингулярны, поскольку, вообще говоря, при изменении сети меняется число контуров и узловых пар. Однако, если рассматривать преобразование всей сети в целом как ортогональной (пространство которой состоит из двух ортогональных подпространств контуров и узловых пар), то матрица преобразования этой сети во всех случаях остается несингулярной, пока преобразования остаются в пределах одного пространства сети. Следовательно, матрица преобразования всегда имеет обратную и совокупность матриц преобразования образует группу.

Тензор синтеза, как было сказано, осуществляет преобразование одного пространства сети в другое, а не только внутри того же пространства. При этом остается инвариантным критерий поведения сети, а мощность уже более инвариантом не является.

Обратим внимание на физику книги, т. е. на ее физическое содержание. Еще в 1944 г. А. А. Андронов и Г. С. Горелик поставили вопрос о разработке «общей динамики машин», как динамики неконсервативных систем. Фактически книга Г. Крона может рассматриваться как введение в общую динамику машин, использующую двойственные уравнения Лагранжа второго рода. Ее можно было бы написать и на языке аналитической динамики, но Г. Крон сознательно выбрал язык электротехники. Это произошло потому, что в аналитической механике нет механического аналога индуктивной и емкостной связи. Кроме того, для машин и механизмов, которые являются передающими сетями, оказалось необходимым использовать инвариант мощности.

Общая динамика машин выделяет в машинах их основное назначение: выполнять процесс внешней работы. Скорость выполнения рабочего процесса характеризуется полезной мощностью машины. Мы можем искать «структуру» соединения частей такой машины или сеть с конечной целью — выполнить работу с той же скоростью и иметь минимальную входную мощность. Но можно фиксировать входную мощность и искать такую «структуру» соединения частей машины или сеть, которая максимизирует полезную мощность на выходе конструкции. В этом смысле переход от конструкции одной машины к другой при инварианте входной мощности можно рассматривать как преобразование координат.

Здесь и находится ключевая идея Г. Крона, весьма важная с точки зрения автоматизации проектирования технических систем, идея, что изменение конструкции есть преобразование координат.

Для современного состояния теории больших систем и кибернетики в работе Крона важны прежде всего концепции моделей систем в виде обобщенной машины и полиэдральных сетей, которые исследуются методами тензорного исчисления.

Это представляет интерес для появившихся в последнее время так называемых интеллектуальных систем, в частности, интеллектуальных вопросно-ответных систем (ИВОС), интеллектуальных банков данных (ИБД), интеллектуальных сетей связи, теория которых разрабатывается специалистами по искусственному интеллекту.

Методы принятия решений, которые исследуются специалистами по искусственному интеллекту, так или иначе связаны с решением задач оптимизации. Наиболее общую формализацию

эти задачи находят в уравнениях Лагранжа II-ого рода, связь которых с сетями Крон исследует в гл. 17 и устанавливает определенную эквивалентность их с уравнениями Максвелла для электромагнитного поля. Если не связывать уравнения Максвелла с электромагнитным полем, то в некотором смысле их можно рассматривать как более детальную формальную запись закона оптимальности любых процессов управления.

Представляя эти уравнения в виде геометрического образа (полиэдральной сети) и исследуя его, Крон, по существу, использует тот же метод, что и в качественной теории колебаний Андронова, где нелинейные дифференциальные уравнения (в обычных производных) качественно исследуются (решаются) геометрически с помощью фазовой плоскости и пространства.

Так же, как в теории колебаний, где исследуются различные траектории в фазовом пространстве типа предельных циклов, в полиэдральной сети рассматриваются пути и циклы, состоящие из дискретных ребер. Каждый «кристалл», полиэдр полиэдральной сети обладает своей автономией, замкнутостью через свою «двойственность» и в то же время (через ту же двойственность) имеет связь с соседними полиэдрами.

Вот именно в этом смысле полиэдральные сети Крона представляют собой универсальную среду для задач принятия решений, что сейчас называется интеллектуальным банком данных.

Далее, современные методы моделирования больших систем переживают определенный этап кризиса. Дело в том, что опыт проектирования таких систем, как автоматизированные системы управления (АСУ) и проектирования (АСП), а также систем принятия решений искусственного интеллекта показал, что все эти системы обладают свойством индивидуальности, т. е. одно предприятие и его АСУ, один профессиональный человеческий интеллект не похожи на другие. Поэтому появилась концепция в теории больших систем о невозможности создания общих моделей, т. е. модели каждой большой системы следует создавать под конкретную, реальную систему со всеми ее индивидуальными свойствами. Однако, используя модель Крона в виде обобщенной машины и полиэдральной сети, и методы их интерпретации, конкретизации (или настройки) на конкретную систему (в частности, с использованием тензора преобразования S), представляется возможным сохранить для кибернетики методологическую концепцию моделей, очень важную для любой науки.

В гл. 8 книги, где Крон разбирает различие между «геометриями» с точки зрения групп, характеризующих эти преобразования, он рассматривает группу евклидовой геометрии, группу дифференциальной геометрии и топологическую группу. Но этих групп ему мало, и он вводит группу преобразований, которая включает топологическую группу лишь как частный случай. Мы назвали эту новую группу Г. Крона «тиринг-топологией». Если топологию называют «резиновой геометрией», т. е. геометрией

линий, нанесенных на растяжимую резиновую пленку, которые при всех деформациях сохраняют точки взаимного пересечения, то Крон предлагает еще «разрывать» такую пленку на «куски». Что же здесь может служить инвариантом группы? Оказывается, что в «резиновой» топологии взаимосвязаны два понятия: «принадлежность» и «непрерывность». Принадлежность точки двум пересекающимся линиям сохраняется лишь благодаря «непрерывности» этих пересекающихся линий. Г. Крон «отпрепарировал» понятие «принадлежность» от понятия «непрерывность». В группе «тиринг-топологии» сохраняется «принадлежность» и не сохраняется «непрерывность».

Возьмем лист бумаги. Этот лист имеет площадь. Введем операцию «разрезания» листа бумаги ножницами (без изменения площади!) и операцию раскладывания обрезков на плоскости. Каждая операция изменяет число обрезков и их расположение на плоскости, но все эти операции тем не менее образуют группу, сохраняющую площадь исходного листа бумаги. Более того, это преобразование является линейным — оно сохраняет «линейную форму», численно равную площади листа бумаги, но число компонент этой линейной формы равно числу обрезков. Число компонент в этой сумме и есть ранг линейного пространства.

Эта новая группа преобразований позволяет вводить квази-изоморфизм для линейных пространств, которые отличаются размерностью, но эквивалентны по численному значению линейной формы. Обычные линейные пространства изоморфны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковую размерность.

В этой и других книгах Крона роль величины, которая остается неизменной при всех преобразованиях, играет величина мощности: сети считаются эквивалентными, если они рассеивают одинаковую мощность. Такие сети преобразуются друг в друга с помощью тензора преобразования.

Это отличие «линейных» преобразований Г. Крона имеет типично тензорный характер: одна и та же величина мощности представляется различными электрическими схемами или сетями, что соответствует тому, что ее компоненты различны в разных системах координат, а она сама остается неизменной или инвариантной величиной.

*Л. Кузин
П. Кузнецов
А. Петров*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. К предисловию

1. **Kron G.** «Diacoptycs: The piecewise Solution of Large Scale Sistsms». Electrical Journal (London). Серия из 20 статей, опубликованных с июня 1957 г. по февраль 1959 г.; т. 158—162. Русский перевод: Г. Крон «Исследование сложных систем по частям — диакоптика». М. «Наука», 1972 г. Отдельной книгой опубликовано издательством Mc Donald (London), 1963.
2. **Kron G.** «Generalized theory of electrical machinery». Trans. AIEE, v. 49, № 4, 1930, pp. 666—685.
3. **Gabriel Kron and System Theory.** Ed. by H. H. Happ. Union College Press, Schenectady, N. Y. 1973.
4. **Kron G.** «The Life and Times of Gabriel Kron or Walking Around the World and Tensors», ed by Philip Alger, Schenectady: Mohauk Development Service, 1969.
5. Memoirs of Research Association of Applied Geometry, Japan v. I,—1955, v. II, 1958, v. III, 1962; v. IV, 1968.
6. **Берендеев А. В.** О работах Крона по применению тензорного анализа в электротехнике. — «Электричество», 1950, № 12.
7. **Грузов Л. Н.** К статье А. В. Берендеева «О работах Крона». — «Электричество», 1951, № 3.
8. **Максимович Н. Г.** К теории преобразования схем Г. Крона. — «Электричество», 1951, № 11.
9. **Крон Г.** Применение тензорного анализа в электротехнике. М., Госэнергоиздат, 1955.
10. **Веников В. А., Ионкин П. А., Петров Г. Н., Копылов И. П.** «Габриэль Крон» — «Электричество», 1969, 1.
11. **Brameller A., John M. N., Scoff M. R.** «Practical Diacoptycs for Electrical Networks», London, N. Y., 1969.
12. **Happ H. H.** «Diacoptycs and Networks», N. Y., London, 1971.
Хэпп Г. Х. Диакоптика и электрические цепи. М., «Мир», 1974.
13. **Lynn J. W.** Tensors in electrical engineering. London, E. Arnold, 1963.
14. **Roth J. P.** «An application of algebraic topology Kron's methods of tearing. Quart. of Appl. Math. 1969, v. XXIII, № 2.
15. **Kron G.** «Tensor Analysis of Networks». N. Y., John Wiley and Sons, 1939; reprinted London: Mc Donald, 1965.
Хэпп Г. Х. Диакоптика и электрические цепи. М., «Мир», 1974.
16. **Арменский В. А., Кузина И. В.** Единая теория электрических машин. Москва, РИО МИЭМ, 1975.
17. **Kron G.** «The Application of Tensors to the Analysis of Rotating Electrical Machinery», General Electric Review, 1935.
Перепечатано в форме книги в 1942 г.
18. Journal of Franklin Institute, 1968, v. 286, № 6.

II. К книге Г. Крона

Учебники по определителям

Muir and Metzler. Theory of Determinants. 1930.
Kowalevsky. Determinantentheory. 1934.

Учебники по матрицам

Cullis. Matrices and Determinoids. 1913 (3 vol./Cambridg University Press.
Turnbull. The Theory of Determinants, Matrices Invariants. 1928, Blackie and Son, Toronto.
Bocher. Introduction to Higher Algebra. 1930, The Macmillan Co.
Wedderburn. Lectures on Matrices. 1936, American Mathematical Society.

Статьи, относящиеся к областям электротехники, использующим матрицы

Strecker and Feldkeller. Grundlagen der Theory des Allgemeinen Vierpols. Elektrische Nach richten—Technik, 1929, p. 93.
Cauer. Vierpoul. Elektrischten—Technic, 1929, p. 272.
Howitt. Group Theory and the Electric Circuit. Physical Review, 1931, p. 1583.
Summers. Vector Theory of Circuits Involving Synchronous Machines. Trans. A I E E, June, 1932, p. 318.
Gewertz. The Syntesis of Finite, Four-terminal Networks. Journ. of Mathematics and Physics, January, 1933, p. 1.
Brillouin. Les Filtres Electriques et la Théorie des Matrices. Revue Générale de l'Electricite, 1936, p. 3.
Sah. Dyadic Algebra Applied to Three-phase Circuits. Electrical Engineering, 1936, p. 876.
Pipes. Matrices in Engineering. Electrical Engineering, 1937, p. 1177.

Более подробная библиография содержится в выше приведенных статьях.

Учебники по алгебраическим формам

Salmon. Modern Higher Algebra. Steckert and Co.
Elliotot. Algebra of Quantics. 1913, Clarendon Press.
Dickson. Modern Algebraic Theories, 1926, Sanborn & Co.

Учебники по теории групп

Mathewcon. Elementary Theory of Finite Groups, 1930, Houghton Mifflin.
Hilton. Finite Groups. Clarendon Press.
Burnside. Theory of Groups 1911.
Eisenhart. Continuous Groups of Transformation. 1934, American Mathematical Society.
Weyl. The Theory of Groups and Quantum Mechanics.

Учебники по топологии

Veblen. Analysis Situs. 1931. American Mathematical Society.
Lefschetz: Topology, 1930, American Mathemaitcal Society.
Tuker. Elementary Topology. 1935, Princeton University Press.

Вводные учебники по тензорному анализу

Предметом большей части последующего списка является дифференциальная геометрия или теория относительности. Книги, отмеченные звездочкой, относятся также к классическим задачам динамики. За единственным исключением, нет книг, написанных на языке инженера.

- * **Wright**. Invariant of Quadratic Differential Forms 1906, Cambridge Tract in Math. and Math. Physics, № 9.
- Garmichael**. Theory of Relativity. 1920, John Wiley and Sons.
- Weyl**. Spase, Time, Matter. 1923, Birkhoff: Relativity and Modern Physics, 1923, Harvard University Press.
- * **Sheppard**. From Determinants to Tensors. 1923, Oxford University Press.
- Rice**. Relativity. 1923, Longmans, Green and Co., London.
- Eddington**. The Mathematical Theory of Relativity. 1924, Cambridge University Press.
- Henderson**. Hobbs and Lasley: The Theory of Relativity. 1924, Oxford Press.
- Eisenhart**. Riemannian Geometry. 1926, Princeton University Press.
- Levy-Civita**. The Absolute Differential Calculus. 1927, Blackie and Son, Toronto.
- Veblen**. Invariants of Quadratic Differential Forms. 1927, Cambridge Tracts in Math. and Math. Physics, № 24.
- О. Веблен**. Инварианты дифференциальных квадратичных форм. М., ИЛ, 1948.
- * **Thomas**. The Elementary Theory of Tensors. 1931, McGraw-Hill.
- * **Jeffreys**. Cartesian Tensors. 1931, Cambridge University Press.
- * **Mc Connell**. Applications of the Absolute Differential Calculus. 1931, Blackie and Son, Toronto.
- Veblen-Whitehead**. Foundations of Differential Geometry. 1932, Cambridge Tracts in Mech and Math. Physics, № 29.
- Веблен О., Уайтхед Дж.** Основания дифференциальной геометрии. М., ИЛ, 1949.
- Levinson and Zeisler**. The law of Gravitation in Relativity. 1932, University of Chicago Press.
- Weatherburn**. An Intioudction to Riemannian Geometry and the Tensor Calculus. 1938, The Macmillan Co.
- * **Kron**. The Application of Tensors to Analysis of Rotating Electrical Machinery. 1938, General Electric Review.
- Laue**. Relativitätstheorie. (2 vol.), 1921, Vieweg and Sohn.
- Struik**. Grundzuge der Mehrdimensionalen Differentialgeometrie in Directer Darstellung. 1922, Springer, Berlin.
- Pauli**. Relativitätstheorie. 1921, Taubner, Leipzig.
- Schouten**. Der Ricci-Kalkül, 1924, Springer, Berlin.
- Rothe**. Einführung in die Tensorrechnung. 1924, Seidel and Sohn, Vienna.
- Duscheck-Mayer**. Lehrbuch der Differentialgeometrie. (2 vol.), 1930, Teubner, Leipzig.
- Schouten-Struik**. Einführung in die Neueren Methoden der Differential geometrie. (2 vol.), 1935, Noordhoff, Groningen.
- Juvet**. Introduction au Calcul Tensoriel. 1922, Blanchard.
- Becquerel**. Le Principe de Relativité. 1922, Gauthier-Villars.
- Galbrun**. Théorie de la Relativité. 1923, Gauthier-Villars.
- Lagrange**. Calcul Differential Absolu. 1926, Mémorial des Scences Mathématiques, Fasc. XIX.
- * **Appell**. Cours de Mécanique Rationelle. Vol. V, 1926.
- Cartan**. Géométrie des Espaces de Riemann. 1928, Gauthier-Villars.
- Romey**. Notions de Calcul Tensoriel. 1934, Gauthier-Villars.
- * **Brillouin**. Les Tenseurs en Mécanique et en Elasticité. 1938, Masson et Cie.

Статьи по применению тензорного анализа в электротехнике

Kron. Tensor Analysis of Rotating Machinery. I, 1932; II and III, 1933. Mimeographed.

- Kron.** Discussion of Summers' paper. Vector Theory of Circuits Involving Synchronous Machines. Trans. A I E E, June, 1932, p. 325.
- Kron.** Non-Riemmanian Dynamics of Rotating Electrical Machinery. Journ. of Mathematics and Physics, 1934, p. 103—194.
- Kron.** The Application of Tensors to the Analysis of Rotating Electrical Machinery. General Electric Review. April, May, June, July, August, October, November, December, 1935. February, March, April, May, June, August, October, 1936. February, April, June, August, October, December, 1937. March, May, 1938.
- Kron.** Quasi-Holonomic Dynamical Systems. Physics, 1936, p. 143.
- Kron.** Tensor Analysis of Multielectrode-Tube Circuits. Electrical Engineering, 1936, p. 1220.
- Kron.** Analyse Tensorielle Appliquée à l'Art de l'Ingénieur. Bulletin de l'Association des Ingénieurs Electriciens. Liège, Belgium, September, October, 1936; January, February, 1937.
- Kron.** Invariant Form of Maxwell-Lorentz Field Equations for Accelerated Systems. Journ. of Applied Physics, March, 1938, p. 196.
- Lauder.** Salient-pole Motors out of Synchronism. Electrical Engineering, 1936, p. 636.
- Wiener, Norbert.** Notes on the Kron Theory of Tensors in Electrical Machinery. Journ. of Electrical Engineering, China, 1936, Nos. 3 and 4.
- Boyajian.** The Tensor — A New Engineering Tool. Electrical Engineering, 1936, p. 856.
- Bewley.** Tensor Algebra in Transformer Circuits. Electrical Engineering, 1936, p. 1214.
- Slepian.** A Parable on Tensor Analysis. Electric Journal, December, 1936.
- Slepian.** Tensors and Fruit Salad. Electric Journal, February, 1937.
- Slepian.** Discussion on Tensor Analysis. Electrical Engineering, 1937, p. 617.
- Slepian.** Letter to The Editor. Electrical Engineering, February, 1938. p. 83. Reply by Hoffmann. March, 1938, p. 137.
- Tucker.** Discussion on Tensor Analysis. Electrical Engineering, 1937, p. 619.
- Chang.** Theory and Tensor Analysis of Single-phase Induction Motors (in Chinese). Tsing-Hua Engineering Quarterly, 1937, Vol. 1, № 1.
- Stigant.** A—c Circuits. Symmetrical Components, Determinants, Tensors and Matrices. The Electrician, October 15, 1937.
- Van den Meersche.** Notes on the Application of Tensors to the Analysis of Networks with Radio — Tubes (in Dutch). Thesis, University of Ghent, 1937.
- Concordia.** Two-reaction Theory of Synchronous Machines with any Balanced Terminal Impedance. Electrical Engineering, 1937, p. 1124.
- Hoffmann.** What is Tensor Analysis? Electrical Engineering, January, February, March, 1938.
- Bouthillon.** Sur la Nature des Grandeurs Électriques et Magnétiques et l'Application de la Notation Tensorielle aux Lois de l'Électricité. Bull. Soc. Franc. Electriciens, January, 1938.
- Coburn.** A new Approach to Kron's Work. Journal of Mathematics and Physics. June 1938. p. 112—122.
- Concordia.** Relations Among Transformations Used in Electrical Engineering Problems. General Electric Review, July, 1938.
- Wikstrom.** The Application of Tensor Analysis to Electrical Calculations. Journal of American Society of Naval Engineers, August, 1938, p. 381.
- Skilling.** Tensors — in «Words of One Syllable». 1938, Electrical Engineering, September, p. 378.

Другие использованные статьи и учебники

- Maxwell.** Electricity and Magnetism. vol. 1.
- Herzog-Feldmann.** Die Berechnung Elektrischer Leitungsnetze, 1927, Springer.
- Webster.** Dynamics.
- Wagner and Evans.** Symmetrical Components, 1933, McGraw-Hill.

- Lyon.** Symmetrical Components, 1937, McGraw-Hills.
- Guillemin.** Communication Networks. (2 vol.), 1931, John Wiley and Sons.
- Dahl.** Electrical Circuits. 1928, McGraw-Hill.
- Mc Ilwain and Brainerd.** High-Frequency Alternating Currents. 1931, John Wiley and Sons.
- Doherty and Keller.** Mathematics of Modern Engineering, 1936, John Wiley and Sons.
- Stigant and Lacey.** The J-and P-Transformer Book. 1937, Johnson and Phillips.
- Foster.** Geometrical Circuits of Electrical Networks. Trans A I E E, 1932, p. 369.
- Kron.** Generalized Theory of Electrical Machinery. Trans. A I E E, 1930, p. 660.
- Tucker.** Non-Riemannian Subspaces. Annals of Mathematics, 1935, p. 965.
- Laporte and Uhlenbeck.** Applications of Spinor Analysis to the Maxwell and Dirac Equations. Physical Review, vol. 37, 1931.
- Veblen.** Spinors in Projective Relativity. Proceedings of the National Academy of Sciences, 1933, p. 979.
- Hoffman, Kock and Pryce.** A Geometrical Interpretation of the Method of Symmetrical Components. Journal of Mathematics and Physics, 1936, p. 18.
- Starr.** Theory of Primary Networks. Trans. A I E E, 1933, p. 939.
- Nyquist.** Regeneration Theory: Bell System Technical Journal, January 1932.
- Van den Meersche.** Sur un Théorème en Électricité Dédruit du Théorème de Réciprocité de Maxwell Généralisé. Revue générale de l'Electricité, 1935, p. 259.
- Alger.** Calculation of Armature Reactance of Synchronous Machinery. Trans. A I E E, 1928, p. 493.

*Краткий список статей о применении тензоров в классической физике
и в задачах механики*

- Ricci and Levi-Civita.** Methods de Calcul Differentiel Absolu et Leurs Applications. 1900, Math. Annalen, p. 125.
- Lipka.** On the Geometry of Motion in Curved n-Space. Journal of Mathematics and Physics, 1921, p. 21.
- Brillouin.** Les lois de l'Elasticité sous Forme Tensorielle Valable pour des Coordonnées Quelconques. Annalen de Physique, Series 10, vol. 3, May—June, 1925.
- Syngé.** On the Geometry of Dynamics, Philosophical Transactions of the Royal Society. London, 1926, Series A, p. 33.
- Murnaghan.** On the Application of Tensor Analysis to Physical Problems. Philosophical Magazine, 1928, Series 7, Vol. 6, № 38. Supplement, p. 779.
- Syngé.** Applications of the Absolute Differential Calculus to the Theory of Elasticity. Proceedings of the London Mathematical Society, Series 2, Vol. 24, p. 103.
- Eisenhart.** Contact Transformations. Annals of Mathematics, 1929, p. 211—249.
- McConnel.** The Braqhistochronic Motion of Dynamical Systems. Proceedings of the Royal Irish Academy. 39 A, 1930, p. 31.
- Lewis.** On the Reduction of Dynamics to Geometry. Philosophical Magazine, 1931, p. 753.
- Wundheiler.** Uber die Variationsgleichungen für Affine Geodetische Linien und Nichtholonome, Nichtkonservative Dynamische Systeme. Prac. Mat.-Fiz. Warszawa, 38, 1931, p. 129.
- Ruse.** Generalized Solutions of Some of the Partial Differential Equations of Mathematical Physics. Quarterly Journal of Mathematics, 1932, p. 15.
- Syngé.** The Equilibrium of a Tooth with a General Conical Root. Philosophical Magazine, Series 7, 1933, p. 969.
- Volterra.** Components of Deformation and Elastic Potential in Any Coordinate Systems. Atti Accad. Lincei, 20, Dec. 2, 1934, 424.
- Horak.** Mécanique Absolue et sa Représentation dans l'Espace-Temps des Configurations. Prac. Mat. — Fiz., Warszawa, 42, 1934, p. 59.

- Van Dijl.** The Application of Ricci-Calculus to the Solution of Vibration Equations of Piezo-Electric Quartz. *Physica*, 1936, p. 31.
- Concordia.** The Use of Tensors in Mechanical Engineering Problems. *General Electric Review*, 1936, p. 335.
- Vranceanu.** Les espaces Non-holonomes et leurs Applications Mécaniques *Mem. Sci. Math.* 76, 1936.
- Synge.** Tensorial Methods in Dynamics. 1936, University of Toronto Studies, Applied Math. Series, № 2.
- Kármán von.** The Fundamentals of the Statistical Theory of Turbulence. *Journal of the Aeronautical Sciences*. February, 1937, p. 131.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Абсолютное дифференциальное исчисление** (см. тензорный анализ)
Абсолютное (ковариантное) дифференцирование 441
Автоматизация проектирования и теория Крона 695
Адмиттанс 89
— сети между двумя точками 437
«Активные» узловые пары 486
Алгебраическая топология 31
Алгебраические формы 84
Алгебраическое дополнение 69
Алгебра n -матриц 40
Анализ ортогональных осей 471
— n -сетей 638
— сетей 636
Аналоги сетевых понятий в топологии 256
Ассоциированные тензоры 530
Аффинная связность, 285, 543
Базовая буква 46
Базовые геометрические объекты 441
— инварианты 526
— переменные 517
— тензоры 441
— уравнения активных асимметричных сетей 544
Вектор ковариантный 217
—, представление 246
— контравариантный 217, 242
—, представление в прямолинейной системе координат 241
— напряжения 107
Векторы 242
—, компоненты 249
— потокосцепления 532
—, способ разделения 261
— тока 107
Величина вектора 236, 535
Ветвь 114
Взаимные реактансы 356
Взаимный импеданс короткого замыкания 555
Взаимосвязанная электрическая и магнитная сеть 505
Взаимосвязанные сети 512
— электрические и магнитные сети 501
— и диэлектрические сети 513
— электромагнитные явления 514
Взаимосоединение 25
— катушек 477
— ламп в сети 448
— узловых сетей 433
Взвешенные функции распределения 36
Воздействующие величины (impresed) 115
Воздействующий ток 115
Волны в многопроводной линии 90
Воображаемая катушка 469
Время 235
Геометризация физических проблем 240
Геометрические объекты 106; 218, 691
— ассоциированные 222
— индуцированные 227
—, математическое представление 107
— и n -матрицы 221
— промежуточные 221
— смешанные 222
—, сопряжение 380
— физики и геометрии 234
Геометрический объект валентности n 107, 226, 617
— дважды ковариантный 222
— одноковариантный 222
— одноконтравариантный 222
— язык 239
Генератор короткозамкнутый нагруженный 393
—, описанный в осях последовательности 391
—, подсоединенный к нагрузке 392
Гипотетические контурные токи (токи Максвелла) 189
Гипотетический ток намагничивания 198
Граф-теоретики 26
Группа 101
— вращений 320
— конечная 320
— преобразований 11
— линейных 321
— сетей 26

- «симметричных составляющих» 394
- соединения 499
- Групповое свойство 324
- Группы бесконечные 320
- Бетти 320
- Дважды компаунд — индексы 273
- — тензоры 284
- — — валентности три 273
- — —, их использование 292
- Двойная обмотка для турбогенератора 362
- Двойственная ($n-1$)-сеть электромагнитного поля 28
- Двойственность между диэлектрической и магнитной цепью 509
- Двойственные величины 517
- скаляры 518
- тензоры 517
- уравнения движения Лагранжа 522
- Двойственный метрический тензор 541
- Двумерное «подпространство» трехмерного пространства 252
- Двухобмоточные трансформаторы 203
- Двухтактный двигатель 458
- усилитель 457
- Двухфазная структура сетей 29
- Деление на 2-матрицы 68
- Диаграмма компаунд-сети несимметричных трехфазных систем 561
- соединения и матрица преобразования половины обмотки синхронного двигателя 372
- Диакоптика 27, 692
- Диэлектрические константы 518
- сети 501, 509
- — узловые 510
- Дифференциальная геометрия 16, 254
- Дифференцирование матрицы 71
- Дуализм физических проблем 411
- Единичные клетки 694
- Задача с ортогональной сетью 640
- сведения пяти уравнений к двум 297
- Задачи анализа систем 637
- линий передачи 644
- физика и инженера 41
- Заземленная звезда 571
- Закон сохранения потока в сети 694
- Закрытый треугольник 577
- Замена активной сети пассивной 299
- комплексных чисел 613
- контурных токов токами ветвей 193
- обычной контурной сети компаунд-сетью 550
- — узловой сети компаунд-сетью 550
- открытого контура закрытым и наоборот 473
- переменных 104
- связей сингулярной матрицей 158
- Замкнутые цепи 113
- Замкнутый гиперпуть 28
- контур 27
- Замыкание 590
- одиночное 593, 604
- двойное в сбалансированной сети 605
- двойной линии на заземление 605
- Замыкания многократные как дважды компаунд-катушки 603
- одновременные в сбалансированной сети 605
- Зигзагообразные соединения 359
- Идентичность матриц, тензоров, геометрических объектов 266
- Изменения в π -сети 649
- импеданса 653
- напряжения открытой цепи 650
- в электрических величинах 643
- Импеданс катушки 76
- — заземления 562
- звезды 562
- потерь 327
- Инвариантное преобразование 196
- уравнение 107
- —, расчленение 275
- Инвариантность 101
- мощности 694
- — входной 522
- входной и выходной мощности 475
- форм 139
- Инвариантные геометрические объекты 229
- —, рекомбинация
- — преобразования 183, 229
- —, примеры 182
- уравнения 229
- Инварианты 228
- Индексное обозначение матриц 46, 78
- — —, гибкость 279
- Индексы 84
- верхние 219
- закрытые 219
- ковариантные и контравариантные 217
- надчеркнутые 406
- немые 219
- «ненадчеркнутые» 406
- нижние 219
- открытые 219
- свободные 219
- скользящие 219
- спинорные 407
- тензорные 407
- фиксированные 219
- — и скользящие 47
- Инженер-математик 5

- Интегрирование матрицы 72
 Интеллектуальный банк данных 696
 Исключение переменных 437, 549
 Искусственный интеллект 695
- Катушка** 38, 113
 Катушек соединение 133
 Катушечный тензор замыкания 593
 — — закрытого треугольника 582
 — — незаземленной звезды 582
 Квадратичные и эрмитовы формы 522
 Квадратный тензор соединения 25
 — —, физическая интерпретация 28
 Ковариантные переменные 517
 — и контравариантные переменные 471
 Компаунд-геометрический объект 260
 Компаунд-индексы 261, 284
 — катушки 546
 — мультитензор 610
 — — матрицы 260
 — ряды 622
 — сети 18, 546
 — — ортогональные 553, 555
 — —, универсализм 579
 — — фиктивные 546
 — тензоры 260, 565
 — —, действия с ними 267
 — — в индексных обозначениях 278
 — —, пример перемножения 269
 — —, произвольное подразделение 303
 — 2-тензор с двумя строками 305
 — 2-тензор трехстрочный 306
 Комплексные ряды в инвариантной форме 623
 — —, их обращение 625
 Константы сети 517
 Контурная цепь триода 631
 Контравариантные переменные 517
 Контурные токи в ортогональной сети 640
 Контуры 113
 Короткое замыкание трех узловых пар 422
 Коэффициент потерь 555
 — связи 540
 — трансформации 333
 Критерий постоянства входного импеданса 668
 — — входного напряжения 670
 — — тока генератора 666
 — — тока в нагрузке 664
 — — разности потенциалов 666
 — постоянного напряжения 667
 — равенства входного или выходного адмиттанса 670
 — — — импеданса активных сетей 669
Ламповая сеть как ортогональная сеть 643
- Линейная форма 251, 522
 Линейное (аффинное) пространство 242
 Локальные (касательные) пространства 542
- Магнитная контурная сеть** 505
 — энергия накопленная 538
Магнитные константы 518
 — сети 501, 504
 — —, сцепленные с электрическими и диэлектрическими 513
 Математический аппарат Крона 5, 9
 Матрица диагональная 70
 — обратная 68
 — — преобразования 137
 — — петлевой обмотки 214
 — —, преобразующая примитивную сеть в действительную 148
 — транспонированная 77
 — характеристическая 533
Матриц произведение 63
Матрицы, действия с ними 52
 — неподвижных сетей 75
 —, представление различных частей 48
 — симметричные и кососимметричные 81
 — сингулярных преобразований 157
 —, физический пример их появления 45
Матричные уравнения 83
Мгновенные инварианты 527
Метод симметричных составляющих 385
Методы атаки (method of attack) 14
Метрический тензор (тензор индуктивности) 285, 528
 — — двухобмоточного трансформатора 528
Минор компоненты 67
Многомерные полиэдральные сети 21
Многообмоточные компаунд-трансформаторы 586
 — трансформаторные системы 326
 — трансформаторы 201, 446
Многообмоточный автотрансформатор 330
Многоэлектродные лампы 446
Множества 219
 — переменных индексов 281
Мостовая схема 164
Мощность 381
 — входа в системе переменного тока 382
- Мультикомпаунд-тензоры** 272
Мультитензоры 609, 611
Мультисистемы координат 609
Накладываемые электромагнитные величины 115

- Направление 114
- вектора 236
- Напряжения и токи в контурах и узловых сетях 469
- — нагрузки неизменные 654
- — в ортогональных сетях 470
- холостого хода 639
- Недостаток общности 16
- Недостаточность обычных пространств 243
- Незаземленная звезда 576
- Некоммутативная алгебра 61
- Нелинейные системы 438
- —, соединение 629
- Неподвижная сеть 75, 89
- Непрерывные обмотки постоянного тока 212
- Несбалансированные напряжения в обмотках постоянного тока 341
- Несимметричные трехфазные многообмоточные трансформаторы и их матрицы преобразования 399
- Несимметричный вписанный треугольник 337
- Несингулярная (квадратная) матрица соединений 24
- матрица для сети произвольного типа 493
- Нетензорный геометрический объект 231
- Неэлектрические сети 23
- n -матрицы 42, 49, 102
- n -множества 42
- N -мерные матрицы 219
- Нуль-матрица 44
- Обмотка конденсаторного двигателя 360
- Обобщение (нормировка) системы «на единицу» 527
- Обобщенная кристаллооптика 22, 35
- Обобщенные координаты 11
- Обобщенный мультикомпаунд-тензор 274
- Обратный тензор преобразования 431
- соединения 29
- Обращение комплексных инвариантных рядов 626
- Общая динамика машин 695
- Общие параметры сети 645
- Объединение соседних катушек 349
- Операторы последовательности 385
- — в методе симметричных составляющих 383
- Операции с матричными уравнениями 83
- с произведениями матриц 81
- Определение уравнения новой системы по уравнениям старой 140
- Определители 66
- Ортогональная компаунд-сеть 553
- сеть с двумя типами контуров и двумя типами узловых пар 553
- теория сетей-ветвей 24
- Ортогональные подпространства 252
- Организация 21
- множества величин в n -матрицу 101
- в технических задачах 40
- Организованные множества 41
- Оси двух типов 583
- Отдельные индексы 261
- Ответные величины 517
- Открытая нитка (трубка) тока 25
- Открытый гиперпуть 28
- контур 26, 413
- путь 26
- треугольник 577
- Переменные 119
- Перестановка 207
- замкнутые обмотки 210
- Переход к чисто контурной сети 496
- Поведение (performance) 13
- Подгруппы 321
- Подлежащее пространство 542
- Полугруппа 319
- Поднятие и опускание индексов 528
- Подразделение матрицы преобразования на произведение нескольких матриц 325
- Полиэдральные волны 37
- сети 27, 33, 38
- — динамические 34
- — неподвижные 34
- Полиэдр как квантово-механическая модель 36
- как релятивистская модель 35
- Полюсная пара 26
- Полюс эллипса 538
- Поляра эллипса 538
- Постулат второго обобщения 101, 111, 614
- первого обобщения 86, 93, 101
- третьего обобщения 232
- Постулаты обобщения 109, 19
- Правила быстрого манипулирования с множествами чисел 19
- Полная компаунд-сеть с двумя контурами и двумя узловыми парами 657
- Поток мощности в нагрузках 655
- Правило стрелки 58, 62
- Представление мощности 250
- Преобразование 101
- n -контурной сети в другую сеть 183
- звезда-контур 311
- , перестановки 207
- , размыкание цепей 204
- сингулярного катушечного тензора к последовательным осям 581
- системы координат 104, 247
- токов ветвей 187

- точек пространства 249
- Преобразования голономные 224
 - контурно-узловые 308
 - линейные 223
 - неголономные 224
 - неинвариантные 237
 - сингулярные 159
 - , проверка 498
 - пространств-структур 257
 - сетей 495
 - спинорные 407
 - точек пространства 249
 - узловых пар 428
 - функциональные 223
- Приложенные напряжения в исключенных осях 295
 - в трех группах катушек 301
 - величины 517
- Приложенный ток в узловых и ортогональных сетях 115
- Примитивная сеть 26, 190, 478, 491
 - контурная 125
 - узловая 128
 - система 17, 175, 123
- Примитивные системы 17
- Примитивный тензор синтеза 684
- Принцип массового производства 14
- Полный реактанс воздушного зазора 355
- Принадлежность и непрерывность 697
- Производные геометрические объекты 441
 - переменные 517
- Пространства взаимосвязанные 254
 - и конфигурации, накладываемые на них 251
 - n -мерные и другие 12
- Пространство унитарное 245
- Прямое обозначение матриц 46, 78
- Псевдотензор 408
- Пусковые обмотки синхронного двигателя 370
- Пути 251
- Разложение в степенной ряд 93
- Разомкнутые катушки 168
- Разрывание (tearing) 25
- Распределительная цепь 161
- Распространение волн в многопроводной линии 90
- Расчленение квадратичных уравнений 285
 - компаунд 2-тензора 283
 - компаунд 3-тензора 280
 - линейных уравнений 275
 - сложных проблем 324
- Реактанс воздушного зазора катушки 352
 - гармонических составляющих 352
 - главный 352
 - дифференциального рассеяния 352
 - полный 352
- Реактансы катушечные 357
 - лобового рассеяния 352, 355
 - отдельных катушек 352
 - пазового рассеяния 352
 - синусоидальные 358
 - соединения обмоток 359
 - , типы 355
 - якорных обмоток 347
- Редукция, двойственный вид формул 436
 - контурной компаунд-сети 552
 - линейных уравнений 307
 - (упрощение) узловых компаунд-сетей 550
- Результатирующая система 176
- Ряд Тейлора 615
 - комплексный 620
 - , обращение 625
- Самоорганизующиеся полиэдральные сети 31
- Свободная энергия (термодинамический потенциал) 540
- Связанная энергия 540
- Сетевые задачи 636
- Сети 110, 122
 - коммуникационные 557
 - и лампы 457
 - многоэлектродной лампы 614
 - с нулевыми импедансами 525
 - , описание поведения 120
 - ортогональные 469, 475
 - , последовательностей 580
 - распределительные 646
 - , синтез 662
 - с тетрадами 461
 - узловые 122, 411
 - , физическое разделение 556
 - чисто контурные 132, 473
- Сеть, в которой имеются два замыкания 597
 - с любым числом контуров и узловых пар с несколькими генераторами с постоянным напряжением 664
 - , состоящая из пяти узловых пар девяти контуров 454
 - триада как ортогональная сеть 468
- Силовые установки 557
- Символ аффинной связности 236
- Симметричная форма окончательной матрицы 153
- Симметричные составляющие 579
- Сингулярные матрицы 159
 - преобразования 156
- Синусоидальный реактанс 358
- Система нормированная «на 1» 527
 - n уравнений с k переменными 314
 - передачи из n параллельных проводников 90

- Скользющие индексы 48
- Скорость 235
- Смешанные координатные оси 607
- Смешанный тензор восприимчивости 541
 - — проводимости 541
 - — резистанса 531
 - — эластанса 532
- Собственные и взаимные импедансы и адмиттансы 555
- Соединение катушек 133
 - — обмотки синхронного двигателя в группы при запуске 371
 - — встречное 146
 - — согласное 146
 - — сетей 173
- Собственный импеданс короткого замыкания 555
- Спинор 38
 - взвешенный 409
- Спинорные индексы 624
 - преобразования 380
- Спинорный анализ (абсолютное дифференциальное исчисление) 10
- Способность к самоорганизации 36
- Способы соединения пяти катушек в пять контуров 132
- «Стальной каркас» при изучении физических явлений 15
 - — в технике 15
- Стадии организации 233
- Стандартная трехфазная обмотка 355
- Статические характеристики лампы 439
- Стенографический способ обозначений 11
- Степенные ряды 93
 - — обращенные 96
- Строительные блоки сетей 122
- Структуры 17
 - пространства 251
- Тензор адмиттанса 107, 443
 - — пентода 445
 - адмиттансов отдельных катушек 445
 - базовый 440
 - валентности два 237
 - — нуль (скаляр) 231
 - — один (вектор) 231
 - — три 617
 - — четыре 617
 - импеданса лампы 464
 - примитивного трансформатора 327
 - — примитивной обмотки 362
 - — лампы 464
 - импедансов результирующей системы 176
 - кривизны Римана — Кристоффеля 237
- метрический 236
- модуляции 618
- Тензорная плотность 409
- Тензорный анализ сетей 20, 31, 101
 - —, искажения 22
 - —, нападки и осуждения 22
 - —, применение к вращающимся электрическим машинам 19
 - —, его роль в проектировании систем 691
- Тензор обратного преобразования 138
- Тензоров гибкость 14
- Тензор отдельный 556
 - преобразования 25, 108, 111, 131, 137, 243, 365, 517
 - —, свойства 317
 - — синтеза 662, 671
 - — для постоянного выходного тока 673
 - — постоянства входного импеданса 681
 - — примитивный 662
 - — для неизменного выходного тока 678
 - — для постоянства разности потенциалов 680
 - — последовательности 384
 - —, использование 390
 - релактанса 505
 - соединения 17
 - узловой 556
 - — импеданса заземления 570
 - — перестановки 569
 - —, пример применения 563
- Тензоры взвешенные 498
 - , геометрические объекты и n -матрицы 265
 - импеданса в осях последовательности 580
 - — трехфазных многообмоточных трансформаторов 580, 558
 - — замыкания 291
 - катушечные в последовательных осях 581
 - — замыкания 590
 - Крона 692
 - и спиноры в решении инженерных задач 13
 - , способ разделения 261
 - узловые 587
 - — в последовательных осях 581, 587
- Теорема о квадратичных формах 85
 - о компенсации 651
 - Тевенина (взаимности) 297, 299, 437, 657
- Теория групп 317
 - динамических систем 6
 - Крона 12
 - относительности 9
 - полиэдральных сетей 6

- электрических сетей 23
- Термодинамика сетей 539
- Тиринг-топология 696
- Токи короткого замыкания 659
- Топологическая структура электрической сети 21
- Топология 10, 16, 254
 - и электричество 18
 - дифференцируемых многообразий 231
- Трансформаторы со сдвигом по фазе 396
- Трехмерная матрица 44
- Траектория 241
- Трижды компаунд-тензор валентности два 274
 - ортогональная организация 30, 38
 - — природа сетей 33
- Триод 467
 - «Узел» 113
- узловая пара 26, 38, 114, 119
 - — активная 486
 - — пассивная 548
- Узловой ток 25
- Узловые пары сетей 638
- Умножение матриц 57, 79
 - — с использованием «правила стрелки» 58
 - — по правилу суммирования 61
- Упрощения в ламповых цепях 627
- Уравнение движения Лагранжа в инвариантной форме 285
 - мощности 521
 - напряжения 286, 518, 630
 - лампы, рассматриваемой как контурная сеть 620
 - — любой контурной сети 147
 - — новой системы 143
 - — ортогональной сети 477, 519
 - тока 519, 630
 - — многоэлектродных ламп 618
 - — ортогональной сети 477, 519, 490
 - — в узловой сети 520
- Уравнения связи 156, 422
 - — двух трансформаторов для исключения намагничивающих токов 600
 - — состояния изолированных контурных сетей 502
- Усилитель промежуточной частоты 450
 - с вырожденной обратной связью 465
 - с обратной связью 454
- Фазосдвигающий соединенный зигзагом трансформатор 398
- Физическая реализуемость катушек 689
- Формулы преобразования 225, 108, 142
 - — вектора напряжения 141
 - — импеданса 296
 - — промежуточных геометрических объектов 226
 - — редукции 18, 289
- Формы 84
- Функциональное разбиение сетей 548
- Характеристическое (вековое) уравнение 533
- Цепи 255
 - вакуумных ламп 557
 - с многоэлектродными лампами 438
 - , общие параметры 644
 - триодные 643
- Четырехконтурная сеть из трехобмоточного трансформатора, двух двухобмоточных и нагрузки 333
- Шестиполюсная волновая обмотка постоянного тока со 126 катушками 346
- Шестиугольный фазосдвинутый автотрансформатор 404
- Эквивалентная цепь 691
- Эквивалентность токов ветвей и контурных токов 194
 - n -катушечных цепей 499
 - контуров и узловых пар 474
- Эквивалентные сети 685
 - узловые сети для ламп 447
- Эластансы 76, 501
- Электрическая лампа 438
 - —, уравнение 439
 - сеть 24, 501
- Электрические константы 518
- Энергия 539
- Эталонная (примитивная сеть) 150
- Этапы восстановления любой узловой сети 420
- Эффективность сети 540

О Г Л А В Л Е Н И Е

| | |
|---|----|
| Предисловие редакторов перевода | 5 |
| Введение (1939 г.) | 9 |
| Аналитический аппарат | 12 |
| Метод рассуждения | 15 |
| Точка зрения | 18 |
| Указание для читателей | 19 |
| Благодарности | 20 |
| Тензорный анализ сетей | 20 |
| Осуждение и одобрение | 22 |
| «Многоязычный парад с фальшивым оперением» | 22 |
| Обилие различных «неэлектрических» сетей | 23 |
| Проявление массовой истерии | 23 |
| Что такое электрическая сеть? | 24 |
| Электрическая сеть как пара «мертвой» и «живой» структур | 24 |
| Квадратный «тензор соединения» и его роль как «тензора преобразования» | 25 |
| Двойственные понятия «открытого» и «замкнутого» контура | 25 |
| Неудачное выражение «узловая пара», или «полусная пара» | 26 |
| «Группа» сетей с n ветвями и инвариантность мощности | 26 |
| «Примитивная» сеть | 26 |
| Избыточность понятия «узел» в «электрической» сети | 27 |
| Понятие «ортогональная» сеть | 27 |
| Физическая интерпретация «квадратного» тензора соединения C | 28 |
| «Двойственная» $(n-1)$ -сеть невидимого электромагнитного поля | 28 |
| «Двухфазная» структура обычных сетей | 29 |
| Физическая интерпретация «обратного» тензора соединения $A = C_1^{-1}$ | 29 |
| Специальные формы C или A | 29 |
| «Трижды-ортогональная» организация | 30 |
| Дополнительные понятия 1-сети | 30 |
| «Старый тип» тензорного анализа и алгебраическая топология | 31 |
| «Новый тип» тензорного анализа и алгебраической топологии | 31 |
| Модели электрических цепей для дифференциальных уравнений в частных производных | 32 |
| «Полиэдральные» сети | 33 |
| «Трижды-ортогональная» природа всех p -сетей | 33 |
| Четыре опорных столба полиэдральных сетей | 33 |
| «Неподвижные» полиэдральные сети | 34 |
| «Динамические» полиэдральные сети | 34 |
| Обобщенная кристаллическая оптика | 35 |
| Электровозбужденный полиэдр как релятивистская модель | 35 |
| Энерговозбуждаемый полиэдр как квантово-механическая модель | 36 |
| Нефизические приложения многомерных аппроксимирующих кривых | 36 |
| Взвешенные функции распределения | 36 |
| Дальнейшее развитие | 37 |
| Предполагаемые изменения в терминологии | 37 |
| Необходимость в трижды-ортогональной реорганизации | 38 |

Глава 1.

| | |
|--|-----------|
| Алгебра n-матриц | 40 |
| 1. Необходимость «организации» в подходе к техническим задачам | 40 |
| 2. «Организованные» множества | 41 |
| 3. n -матрицы | 42 |
| 4. Физический пример появления n -матриц | 45 |
| 5. Система обозначений | 46 |
| 6. «Фиксированные» и «скользящие» индексы | 47 |
| 7. Представление n -матриц более высоких размерностей | 49 |
| 8. Матричное обозначение | 51 |
| 9. Действия с n -матрицами | 52 |
| 10. Сложение | 53 |
| 11. Умножение 1-матриц | 57 |
| 12. Умножение 2-матриц с использованием «правила стрелки» | 58 |
| 13. Умножение 2-матриц по правилу суммирования | 61 |
| 14. Произведение любых двух n -матриц | 63 |
| 15. Определители | 66 |
| 16. Деление на 2-матрицы | 68 |
| 17. Дифференцирование | 71 |
| 18. Интегрирование | 72 |

Глава 2.

| | |
|--|-----------|
| Постулат первого обобщения | 74 |
| 1. Появление n -матриц | 74 |
| 2. n -матрицы неподвижных сетей с сосредоточенными параметрами | 75 |
| 3. Порядок следования матриц в прямом обозначении | 77 |
| 4. Порядок умножения матриц | 79 |
| 5. Операции с произведениями матриц | 81 |
| 6. «Симметричные» и «кососимметричные» матрицы | 81 |
| 7. Операции с матричными уравнениями | 83 |
| 8. Действия с индексами | 84 |
| 9. «Формы» | 84 |
| 10. «Постулат первого обобщения» | 86 |
| 11. Неподвижные сети | 89 |
| 12. Распространение волн в многопроводной линии | 90 |
| 13. Разложение в степенной ряд ¹⁾ | 93 |
| 14. Обращенный степенной ряд ¹⁾ | 96 |
| 15. Исключение переменных | 99 |

Глава 3.

| | |
|---|------------|
| Постулат второго обобщения | 101 |
| 1. Созидание новых математических объектов | 101 |
| 2. Постулат второго обобщения | 103 |
| 3. Понятие «геометрический объект» | 106 |
| 4. Математическое представление геометрического объекта | 107 |
| 5. Тензор преобразования | 108 |
| 6. Назначение постулатов обобщения | 109 |
| 7. Сети | 112 |
| 8. Строительные блоки сетей | 112 |
| 9. Аналитические единицы сети | 113 |
| 10. Другая физическая интерпретация | 114 |
| 11. Накладываемые электромагнитные величины | 115 |
| 12. Условности терминологии | 117 |
| 13. Два типа переменных | 119 |
| 14. Три типа описания поведения сети | 120 |

| | |
|---|-----|
| 15. Резюме по «уравнениям движения» | 121 |
| 16. Типы сетей | 122 |
| 17. Понятие примитивной системы | 123 |
| 18. Примитивная «контурная» сеть | 125 |
| 19. Примитивная «узловая» сеть | 128 |

Глава 4.

| | |
|--|------------|
| Тензор преобразования | 131 |
| 1. Этапы анализа | 131 |
| 2. Чисто-контурные сети | 132 |
| 3. Соединение катушек | 133 |
| 4. Соотношение между старыми и новыми токами | 136 |
| 5. Тензор преобразования | 137 |
| 6. «Инвариантность форм» | 139 |
| 7. «Формула преобразования» вектора напряжения e_m | 141 |
| 8. Формула преобразования Z_{mn} | 142 |
| 9. Новое уравнение напряжения | 143 |
| 10. Токи и напряжения в отдельных катушках | 144 |
| 11. Соглашение о знаках | 146 |
| 12. Последовательность этапов вывода уравнений | 147 |
| 13. Последовательность этапов рассуждения | 150 |
| 14. Второй пример | 150 |

Глава 5.

| | |
|---|------------|
| Сингулярные преобразования | 156 |
| 1. Уравнения связи | 156 |
| 2. Матрицы сингулярных преобразований | 157 |
| 3. Замена связей сингулярной матрицей C | 158 |
| 4. Вычисления с помощью сингулярной матрицы C | 159 |
| 5. Распределительная цепь | 161 |
| 6. Мостовая схема | 164 |
| 7. Потенциалы на разомкнутых катушках | 168 |
| 8. Тензор адмиттансов отдельных катушек | 170 |
| 9. Пример u_c для отдельных катушек | 172 |
| 10. Соединение нескольких сетей | 173 |
| 11. Примитивная система | 175 |
| 12. Результирующая система | 176 |
| 13. Пример соединения двух контурных сетей | 177 |
| 14. Выбор переменных | 180 |

Глава 6.

| | |
|--|------------|
| Примеры инвариантных преобразований | 182 |
| 1. Виды преобразований | 182 |
| 2. Преобразование n -контурной сети в другую n -контурную сеть | 183 |
| 3. Проверка преобразования | 185 |
| 4. Преобразование токов ветвей | 187 |
| 5. Гипотетические «контурные» токи | 189 |
| 6. Замена контурных токов токами ветвей | 193 |
| 7. Эквивалентность токов ветвей и контурных токов | 194 |
| 8. Изменение числа витков | 196 |
| 9. Пренебрежение «токами намагничивания» как связями | 198 |
| 10. Связи как преобразования | 199 |
| 11. Многообмоточные трансформаторы | 201 |
| 12. Токи нагрузки и намагничивания | 202 |
| 13. Двухобмоточный трансформатор | 203 |
| 14. Размыкания цепей как преобразования | 204 |

| | |
|---|------------|
| 15. Перестановки как преобразования | 207 |
| 16. Замкнутые обмотки как перестановки | 210 |
| 17. Непрерывные обмотки постоянного тока | 212 |
| 18. Физическая интерпретация тензора преобразования | 215 |
| Глава 7. | |
| Ковариантные и контравариантные индексы | 217 |
| 1. Верхние и нижние индексы | 217 |
| 2. Геометрические объекты | 218 |
| 3. Промежуточные геометрические объекты | 221 |
| 4. Ассоциированные геометрические объекты | 222 |
| 5. Линейные и функциональные преобразования | 223 |
| 6. Голономные и неголономные преобразования | 224 |
| 7. Формулы преобразования | 225 |
| 8. Формулы преобразования промежуточных геометрических объектов | 226 |
| 9. Индуцированные геометрические объекты | 227 |
| 10. Инварианты | 228 |
| 11. Определение тензора | 230 |
| 12. Важнейшие тензоры физических проблем | 232 |
| 13. Необходимость постулата третьего обобщения | 232 |
| 14. Три стадии организации | 233 |
| 15. Важные геометрические объекты физики и геометрии | 234 |
| 16. Неннвариантные преобразования | 237 |
| Глава 8. | |
| Геометрические интерпретации | 239 |
| 1. Геометрический язык | 239 |
| 2. Геометризация физических проблем | 240 |
| 3. Представление контравариантного вектора | 242 |
| 4. Недостаточность обычных пространств | 243 |
| 5. Представление ковариантного вектора | 246 |
| 6. Преобразование системы координат | 247 |
| 7. Преобразование точек пространства | 249 |
| 8. Представление мощности | 250 |
| 9. Пространства и конфигурации, накладываемые на них | 251 |
| 10. Ортогональные подпространства | 252 |
| 11. Ограниченность данного геометрического представления | 253 |
| 12. Взаимосвязанные пространства | 254 |
| 13. Аналогии сетевых понятий в топологии | 256 |
| 14. Преобразование пространств-структур | 257 |
| Глава 9. | |
| Компаунд-тензоры | 260 |
| 1. Компаунд- l -матрицы, геометрические объекты и тензоры | 260 |
| 2. Способ разделения тензоров | 261 |
| 3. Различие между тензорами, геометрическими объектами и l -матрицами | 265 |
| 4. Действия с компаунд-тензорами | 267 |
| 5. Пример перемножения компаунд-2-тензоров | 269 |
| 6. Мульти-компаунд-тензоры | 272 |
| 7. Расчленение линейных уравнений | 275 |
| 8. Компаунд-тензоры в индексных обозначениях | 278 |
| 9. Гибкость индексных обозначений | 279 |
| 10. Различные множества переменных индексов | 281 |

| | |
|---|-----|
| 11. Компаунд-индексы | 284 |
| 12. Расчленение квадратичных уравнений | 285 |
| 13. Рекомбинация инвариантных уравнений | 287 |

Глава 10.

| | |
|---|------------|
| Формулы редукции | 289 |
| 1. Уменьшение числа уравнений | 289 |
| 2. Исключение множества переменных | 289 |
| 3. Формула редукции импеданса | 291 |
| 4. Использование дважды компаунд-тензоров | 292 |
| 5. Приложенные напряжения в исключенных осях | 295 |
| 6. Числовой пример | 297 |
| 7. Замена активной сети пассивной сетью | 299 |
| 8. Обобщение теоремы Тевенина | 299 |
| 9. Приложенные напряжения в трех группах катушек | 301 |
| 10. Произвольное подразделение компаунд-тензоров | 303 |
| 11. Обращение компаунд-2-тензора с двумя строками | 305 |
| 12. Обращение трехстрочного компаунд-2-тензора | 306 |
| 13. Выводы по редукции линейных уравнений | 307 |
| 14. Контурно-узловые преобразования | 308 |
| 15. Импеданс между двумя точками | 311 |
| 16. Система n -уравнений с k переменными | 314 |

Глава 11.

| | |
|---|------------|
| Теория групп | 317 |
| 1. Свойства тензора преобразования | 317 |
| 2. Теория групп | 317 |
| 3. Определение групп | 318 |
| 4. Примеры конечных групп | 320 |
| 5. Примеры бесконечных групп | 320 |
| 6. Подгруппы | 321 |
| 7. Преобразование, инвариантность, группа | 322 |
| 8. Групповое свойство | 323 |
| 9. Расчленение сложных проблем | 324 |
| 10. Типы разделения C | 325 |
| 11. Многообмоточные трансформаторные системы | 326 |
| 12. Тензор импеданса примитивного трансформатора | 327 |
| 13. Другое определение импеданса потерь | 329 |
| 14. Многообмоточный автотрансформатор | 330 |
| 15. Отношение нагрузок блоков управления и регулирования | 333 |
| 16. Несимметричный вписанный треугольник | 337 |
| 17. Несбалансированные напряжения в обмотках постоянного тока | 341 |

Глава 12.

| | |
|---|------------|
| Расчет реактансов обмоток | 347 |
| 1. Универсальность метода | 347 |
| 2. Метод подхода | 348 |
| 3. Объединение соседних катушек | 349 |
| 4. Расчет реактансов отдельных катушек | 352 |
| 5. Стандартная трехфазная обмотка | 355 |
| 6. Обмотка конденсаторного двигателя | 360 |
| 7. Пример двойной обмотки для турбогенератора | 362 |
| 8. Пусковые обмотки синхронного двигателя | 370 |

Глава 13.

| | |
|---|------------|
| Спинорные преобразования | 380 |
| 1. Сопряжение геометрических объектов | 380 |
| 2. Более общее определение мощности | 381 |
| 3. Формулы преобразования | 383 |
| 4. Тензор «последовательности» | 383 |
| 5. Тензор импеданса последовательности | 386 |
| 6. Приведение к диагональной форме | 388 |
| 7. Использование тензора последовательности | 390 |
| 8. Генератор, описанный в осях последовательности | 391 |
| 9. Генератор, подсоединенный к нагрузке | 392 |
| 10. Группа «симметричных составляющих» G_{sc} | 394 |
| 11. Трансформаторы со сдвигом фаз | 396 |
| 12. Получение новых токов | 397 |
| 13. Тензор преобразования | 398 |
| 14. Тензор импеданса | 403 |
| 15. Шестиугольный сдвигающий фазу автотрансформатор | 404 |
| 16. «Надчеркнутые» и «ненадчеркнутые» индексы | 406 |
| 17. Тензорные и спинорные индексы | 407 |
| 18. Взвешенные тензоры | 408 |
| 19. Взвешенные спиноры | 409 |

Глава 14.

| | |
|---|------------|
| Узловые сети | 411 |
| 1. Дуализм физических проблем | 411 |
| 2. Чисто узловые сети | 412 |
| 3. Инвариантность мощности | 414 |
| 4. Тензор адмиттанса Y' | 414 |
| 5. Вектор тока I' | 418 |
| 6. Сводка этапов | 420 |
| 7. Уравнения связей | 422 |
| 8. Сингулярный тензор преобразования | 424 |
| 9. Преобразование узловых пар | 428 |
| 10. Числовой пример | 430 |
| 11. Физическая интерпретация обратного тензора преобразования | 431 |
| 12. Взаимосоединение сетей | 432 |
| 13. Пример соединения двух сетей | 433 |
| 14. Двойственный вид формул редукции | 436 |

Глава 15.

| | |
|--|------------|
| Цепи с многоэлектродными лампами | 438 |
| 1. Нелинейные системы | 438 |
| 2. Электродная лампа | 438 |
| 3. Уравнение лампы | 439 |
| 4. «Базовые» и «производные» тензоры | 440 |
| 5. Конструирование новых тензоров дифференцированием | 441 |
| 6. Тензор адмиттанса | 443 |
| 7. Многоэлектродные лампы и многообмоточные трансформаторы | 446 |
| 8. Эквивалентные узловые сети для ламп | 447 |
| 9. Взаимосоединение ламп в сети | 448 |
| 10. Усилитель промежуточной частоты | 450 |
| 11. Усилитель с обратной связью | 454 |
| 12. Двухтактный усилитель | 457 |
| 13. Критерий возникновения колебаний | 460 |
| 14. Сети с тетрами | 461 |

| | |
|---|-----|
| 15. Тензор импеданса лампы | 464 |
| 16. Усилитель с вырожденной обратной связью | 465 |
| 17. Упрощенное представление триода | 467 |

Глава 16.

| | |
|---|------------|
| Ортогональные сети | 469 |
| 1. Напряжения и токи в контурных и узловых сетях | 469 |
| 2. Напряжения и токи в ортогональных сетях | 470 |
| 3. Ковариантные и контравариантные переменные | 471 |
| 4. Известные величины отклика | 472 |
| 5. Ортогональные чисто-контурные и чисто-узловые сети | 473 |
| 6. Инвариантность входной и выходной мощности | 475 |
| 7. Уравнения напряжений и токов | 477 |
| 8. Этапы вывода уравнения напряжения | 478 |
| 9. Пример ортогональной сети | 480 |
| 10. «Ортогональные» уравнения напряжения | 484 |
| 11. «Активные» узловые пары | 486 |
| 12. Числовой пример | 487 |
| 13. Этапы вывода уравнения тока | 490 |
| 14. Сводка основных этапов | 492 |
| 15. Несингулярная матрица S для сети произвольного типа | 493 |
| 16. Преобразование двух сетей произвольного типа | 495 |
| 17. Проверка преобразования | 498 |
| 18. Эквивалентность всех n -катушечных сетей | 499 |

Глава 17.

| | |
|---|------------|
| Взаимосвязанные электрические и магнитные сети | 501 |
| 1. Магнитные и диэлектрические сети | 501 |
| 2. Уравнения состояния изолированных контурных сетей | 502 |
| 3. Магнитные сети | 504 |
| 4. Пример магнитной контурной цепи | 505 |
| 5. Диэлектрические сети | 509 |
| 6. Пример узловой диэлектрической сети | 510 |
| 7. Взаимосвязанные сети | 512 |
| 8. Взаимосвязанные электромагнитные явления | 514 |
| 9. Собственные и взаимные индуктивности | 515 |
| 10. Базовые и производные переменные | 517 |
| 11. Двойственные величины | 517 |
| 12. Уравнение напряжения | 518 |
| 13. Уравнение тока | 519 |
| 14. Уравнение мощности | 521 |
| 15. Квадратичные и эрмитовы формы | 522 |
| 16. Двойственные уравнения движения Лагранжа | 522 |

Глава 18.

| | |
|---|------------|
| Метрический тензор | 525 |
| 1. Сети с нулевыми конструктивными константами | 525 |
| 2. Базовые инварианты | 526 |
| 3. Обобщение (нормировка) системы «на единицу» | 527 |
| 4. Метрический тензор a_{mn} | 528 |
| 5. Поднятие и опускание индексов | 530 |
| 6. Ассоциированные тензоры конструктивных констант | 531 |
| 7. Ассоциированные тензоры электромагнитных величин | 532 |
| 8. Смешанные уравнения движения | 532 |
| 9. Преимущества использования смешанных тензоров | 534 |
| 10. Единичный эллипс | 534 |

| | |
|---|------------|
| 11. Величина вектора | 537 |
| 12. Полюс и поляр эллипса | 538 |
| 13. Накопленная магнитная энергия | 538 |
| 14. Термодинамика сетей | 539 |
| 15. Двойственный метрический тензор | 541 |
| 16. «Подлежащие» пространства и «локальные» пространства | 542 |
| Глава 19. | |
| Компаунд-сети | 544 |
| 1. Базовые уравнения активных асимметричных сетей | 544 |
| 2. Компаунд-сети | 546 |
| 3. Функциональное разбиение сетей | 548 |
| 4. Исключение переменных | 549 |
| 5. Редукция (упрощение) узловых компаунд-сетей | 550 |
| 6. Редукция контурной компаунд-сети | 552 |
| 7. Упрощение ортогональных компаунд-сетей | 553 |
| 8. Терминология компаунд-сетей | 555 |
| 9. Физическое разделение сетей | 556 |
| 10. Трехфазные устройства как компаунд-катушки | 558 |
| 11. Тензор преобразования компаунд-сети | 562 |
| 12. Прохождение компаунд-токов через компаунд-сети | 565 |
| 13. Узловой тензор | 567 |
| 14. Узловые тензоры как перестановки | 569 |
| 15. Узловой тензор импеданса заземления | 570 |
| 16. Пример применения узловых тензоров | 573 |
| 17. «Катушечный» тензор преобразования | 576 |
| 18. Пренебрежение намагничивающим током | 577 |
| Глава 20. | |
| Симметричные составляющие | 579 |
| 1. Универсализм компаунд-сетей | 579 |
| 2. Тензоры импеданса в осях последовательности | 580 |
| 3. Узловые и катушечные тензоры в последовательных осях | 581 |
| 4. Пример с осями двух типов | 583 |
| 5. Многообмоточные компаунд-трансформаторы | 586 |
| 6. Замыкания | 590 |
| 7. Тензоры импеданса и катушечные тензоры замыканий | 590 |
| 8. Пример одиночного замыкания | 593 |
| 9. Предварительные расчеты для одновременных замыканий | 597 |
| 10. Одновременные замыкания в сбалансированной сети | 603 |
| 11. Пример одиночного замыкания в сбалансированной сети | 604 |
| 12. Пример двойного замыкания в сбалансированной сети | 605 |
| 13. Смешанные координатные оси | 607 |
| Глава 21. | |
| Мультитензоры | 609 |
| 1. Формирование еще более сложных сущностей | 609 |
| 2. Мультисистемы координат | 609 |
| 3. Представление мультитензоров | 611 |
| 4. Замена комплексных чисел | 613 |
| 5. Сети многоэлектродной лампы | 614 |
| 6. Более общая формулировка «постулата второго обобщения» | 614 |
| 7. Ряды Тейлора | 615 |
| 8. Ряды Тейлора в инвариантной форме | 616 |
| 9. Геометрические объекты более высокой валентности | 617 |

| | |
|--|-----|
| 10. Тензор модуляции | 618 |
| 11. Комплексные ряды Тейлора | 620 |
| 12. Компаунд-ряды | 622 |
| 13. Комплексные ряды в инвариантной форме | 623 |
| 14. Спинорные индексы | 624 |
| 15. Обращение тейлоровских рядов | 625 |
| 16. Обращение комплексных рядов | 625 |
| 17. Обращение комплексных инвариантных рядов | 626 |
| 18. Упрощения в ламповых цепях | 627 |
| 19. Соединение нелинейных систем | 629 |
| 20. Решение уравнений | 630 |
| 21. Пример контурной цепи триода | 631 |

Глава 22.

| | |
|--|-----|
| Анализ сетей | 636 |
| 1. Типы сетевых задач | 636 |
| 2. Метод рассуждения | 637 |
| 3. Анализ π -сетей | 638 |
| 4. Напряжения открытой цепи | 639 |
| 5. Контурные токи в ортогональной сети | 640 |
| 6. Триодные цепи | 643 |
| 7. Общие параметры цепи | 644 |
| 8. Распределительные сети | 646 |
| 9. Изменения в электрических величинах | 648 |
| 10. Изменение в π -сети | 649 |
| 11. Изменение напряжений открытой цепи | 650 |
| 12. Обобщение «теоремы о компенсации» | 651 |
| 13. Изменение импеданса | 653 |
| 14. Неизменные напряжения и токи нагрузки | 654 |
| 15. Поток мощности в нагрузках | 655 |
| 16. Обобщение теоремы Тевенина | 657 |
| 17. Токи короткого замыкания | 659 |
| 18. Теорема, двойственная теореме Тевенина | 660 |

Глава 23.

| | |
|--|-----|
| Синтез сетей | 662 |
| 1. Типы рассматриваемых задач | 662 |
| 2. Общность метода | 663 |
| 3. Критерий постоянства токов в нагрузке | 664 |
| 4. Критерий постоянства разности потенциалов | 666 |
| 5. Критерий постоянства напряжений на нагрузке | 667 |
| 6. Критерий постоянства входного импеданса | 668 |
| 7. Критерий равенства входного импеданса активных сетей | 669 |
| 8. Критерий равенства входного и выходного адмиттанса | 670 |
| 9. Определение «тензора синтеза» C_{σ} | 671 |
| 10. Установление тензора синтеза | 672 |
| 11. Тензор синтеза для «постоянного выходного тока» | 673 |
| 12. Сингулярный тензор синтеза | 676 |
| 13. Влияние пассивных узловых пар на A_{σ} | 677 |
| 14. Тензор синтеза для «неизменного выходного тока» | 678 |
| 15. Тензор синтеза для «постоянства разности потенциалов» | 680 |
| 16. Тензор синтеза «постоянства входного импеданса» | 681 |
| 17. «Примитивный» тензор синтеза | 684 |
| 18. Пример двух эквивалентных сетей | 685 |
| 19. Физическая реализуемость катушек | 689 |
| 20. Три произвольных множества величин в синтезе сетей | 689 |
| «Тензорный анализ сетей» Г. Крона и его роль в проектировании систем | 691 |
| Список литературы | 698 |
| Предметный указатель | 704 |

ИБ № 369

ГАБРИЭЛЬ КРОН

Тензорный анализ сетей

Перевод с английского

Под редакцией *Л. Т. Кузина* и *П. Г. Кузнецова*

Редактор **Н. Я. Гутчина**

Художественный редактор **А. Н. Алтунин**

Обложка художника **В. М. Аладьева**

Технический редактор **Т. П. Сафонова, В. А. Позднякова**

Корректор **Л. С. Глаголева**

Сдано в набор 31.10.77. Подписано в печать 03.10.78. Формат 60×90/16.

Бумага типографская № 2. Гарнитура литерат. Печать высокая.

Объем 45 усл. п. л. 43,51 уч.-изд. л. Тираж 8400 экз. Зак. 3519.

Цена 3 р. 30 к.

Издательство «Советское радио», Москва, Главпочтамт, а/я 693

Московская типография № 8 Союзполиграфпрома

при Государственном комитете СССР

по делам издательств, полиграфии и книжной торговли,

Хохловский пер., 7.